دانشگاه سمنان

Semnan University
Faculty of Mechanical Engineering

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشکده مهندسی مکانیک

درس کنترل اتوماتیک

Automatic Control

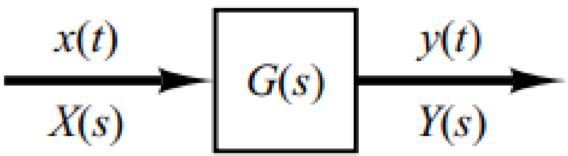
روش های تحلیل پاسخ فرکانسی

❑ <u>فهرست مطالب</u>

دانشگاه سمنان

پاسخ فرکانسی سیستم های کنترل

- تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم
  - در تحلیل فرکانسی، پاسخ سیستم در مقابل ورودی تحریک نوسانی اعمال شده بررسی می شود.
  - در این روش، فرکانس سیگنال ورودی در بازه مشخصی تغییر می کند و رفتار سیستم ارزیابی می شود.
  - با در نظر گرفتن ورودی سینوسی:



$$x(t) = X \sin \omega t$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi} \rightarrow G(j\omega) = Me^{j\phi} = M\underline{/\phi}$$

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)} \rightarrow Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}X(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega X}{s^2+\omega^2} = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+s_1} + \frac{b_2}{s+s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s+s_n}$$

پاسخ فرکانسی سیستم های کنترل

- تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم
  - به دست آوردن پاسخ در حوزه زمان

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega X}{s^2+\omega^2} = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+s_1} + \frac{b_2}{s+s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s+s_n}$$

$$\rightarrow \quad y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t}$$

  - تعیین پاسخ ماندگار (پایا)

$$\rightarrow \quad y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

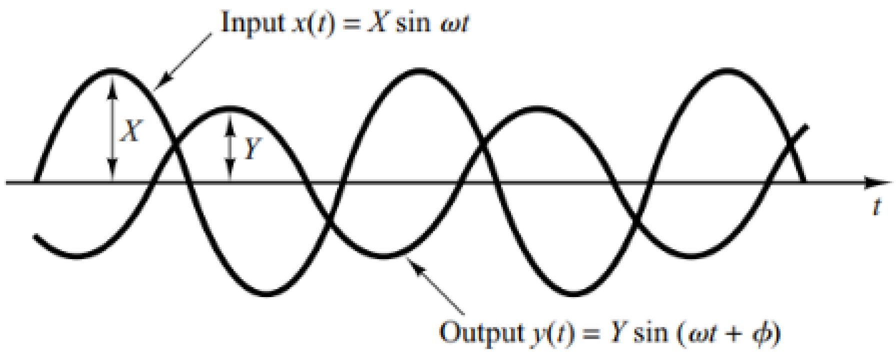
$$a = G(s)\frac{\omega X}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s)\frac{\omega X}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\bigg|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

پاسخ فرکانسی سیستم های کنترل

- تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم
  - تعیین پاسخ ماندگار (پایا) در حوزه فرکانس

$$y_{ss}(t) = X|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} = X|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) = Y \sin(\omega t + \phi)$$



✓ تغییر اندازه

✓ تغییر فاز

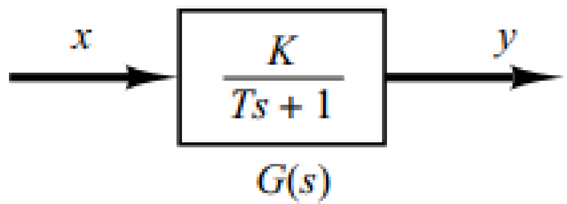
$$|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right| = \text{amplitude ratio of the output sinuisoid to the input sinusoid}$$

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{/\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}} = \text{phase shift of the output sinusoid with respect to the input sinusoid}$$

دانشگاه سمنان

پاسخ فرکانسی سیستم های کنترل

- تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم
  - مثال



$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

$$\rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

$$\rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

$$x(t) = X \sin \omega t \quad \rightarrow \quad y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1} T\omega\right)$$

پاسخ فرکانسی سیستم های کنترل

تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم

مثال

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}} \rightarrow G(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T_1}}{j\omega + \frac{1}{T_2}} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

$$\rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{T_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

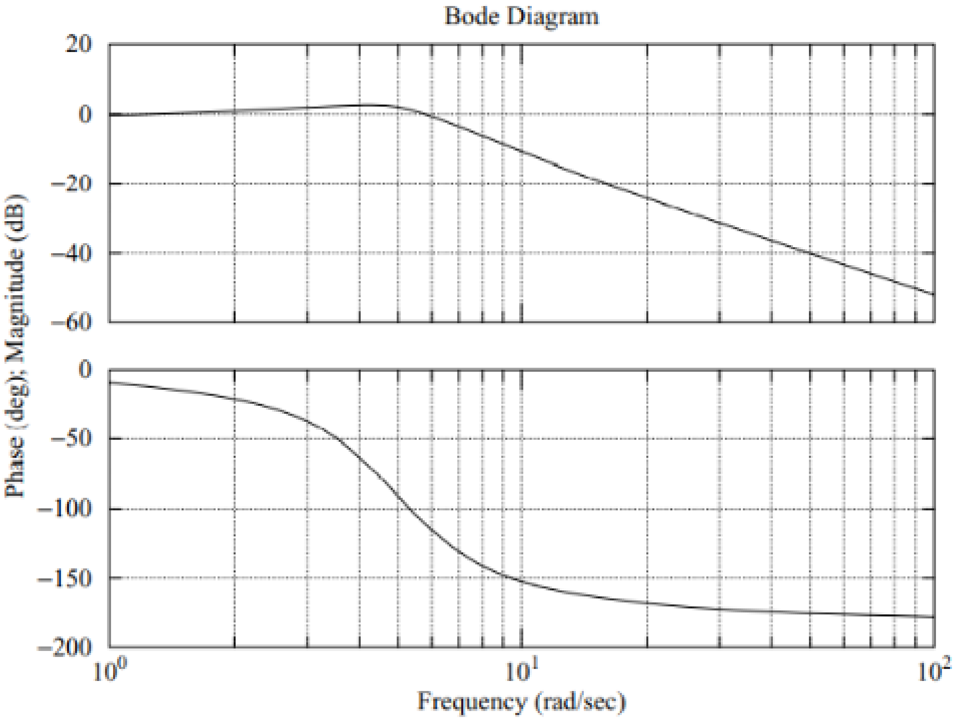
$$\phi = \underline{/G(j\omega)} = \tan^{-1}T_1\omega - \tan^{-1}T_2\omega$$

$$x(t) = X\sin\omega t \rightarrow y_{ss}(t) = \frac{XT_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}\sin(\omega t + \tan^{-1}T_1\omega - \tan^{-1}T_2\omega)$$

دیاگرام بود و نایکوئیست

❑ دیاگرام بود (Bode)

❖ دیاگرام بود تغییرات نسبت اندازه و فاز پاسخ سیستم را بر حسب فرکانس های مختلف نمایش می دهد.



❖ دیاگرام بود از دو بخش تشکیل می شود:

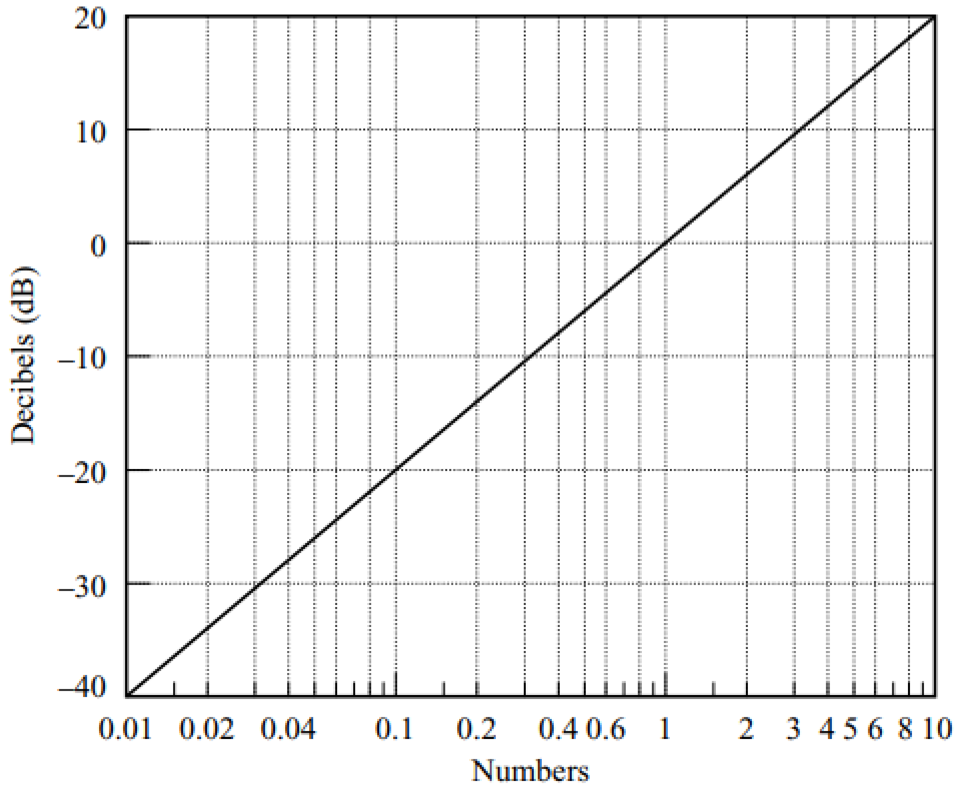
✓ دیاگرام اندازه: دیاگرام لگاریتمی از اندازه تابع تبدیل مدار بسته بر حسب فرکانس سیستم (برحسب دسیبل dB)

$$\rightarrow 20\log|G(j\omega)|$$

✓ دیاگرام فاز: دیاگرام فاز تابع تبدیل مدار بسته بر حسب فرکانس سیستم

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - تبدیل اندازه به دسیبل



$$\rightarrow 20\log|G(j\omega)|$$

دیاگرام بود و نایکوئیست

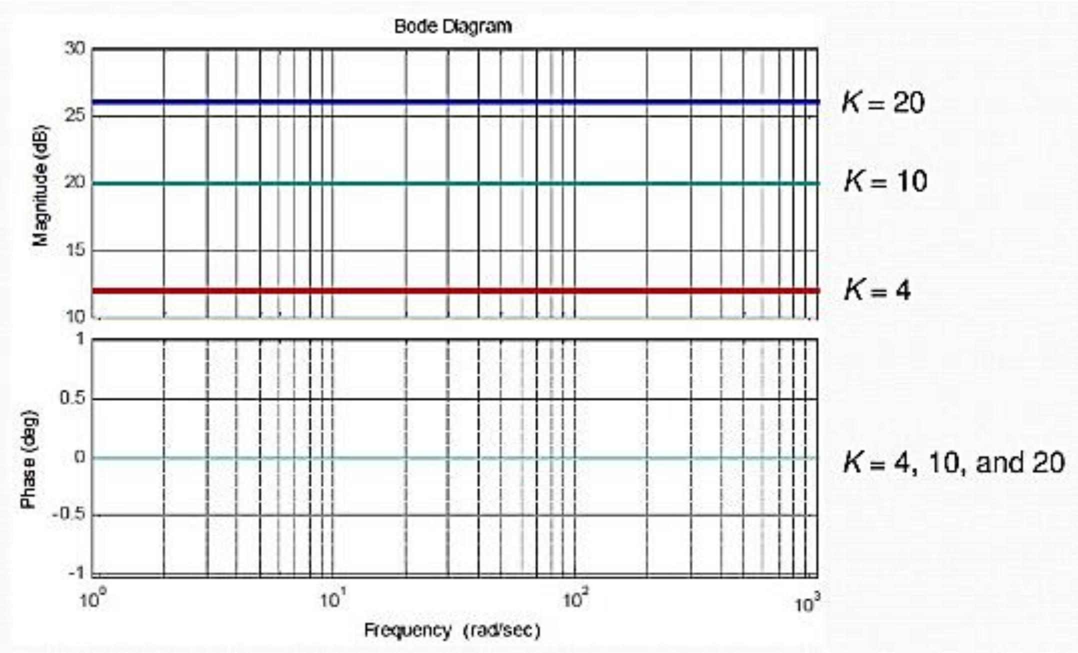
- دیاگرام بود (Bode)
  - برای رسم دیاگرام بود، ابتدا تابع تبدیل به صورت ضرب توابع تبدیل عمومی تقسیم می شود:

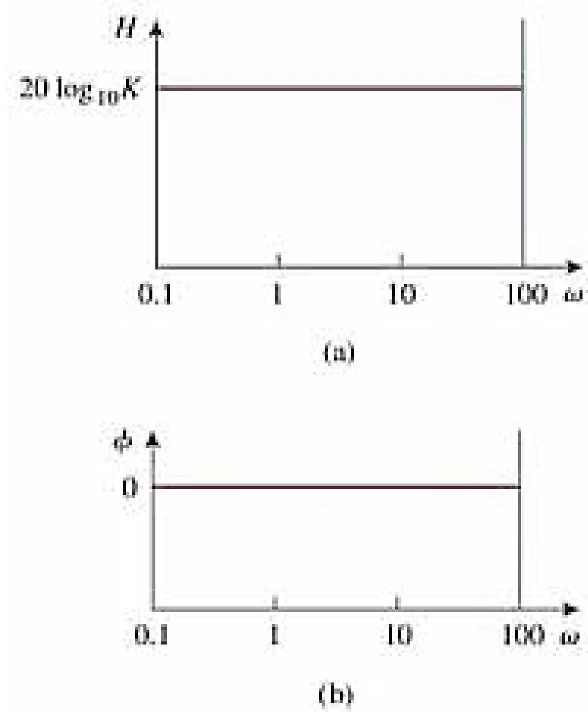
1. Gain K
2. Integral and derivative factors $(j\omega)^{\mp 1}$
3. First-order factors $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$
4. Quadratic factors $\left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{\mp 1}$

✓ با توجه به خاصیت لگاریتم در تبدیل ضرب به جمع ($log(a.b)=log(a)+log(b)$)، دیاگرام نهایی برابر حاصل جمع دیاگرام توابع جداگانه است.

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - ضریب بهره ثابت (K)
    - ✓ برای ضریب بهره، دیاگرام اندازه ثابت و دیاگرام فاز برابر صفر است.





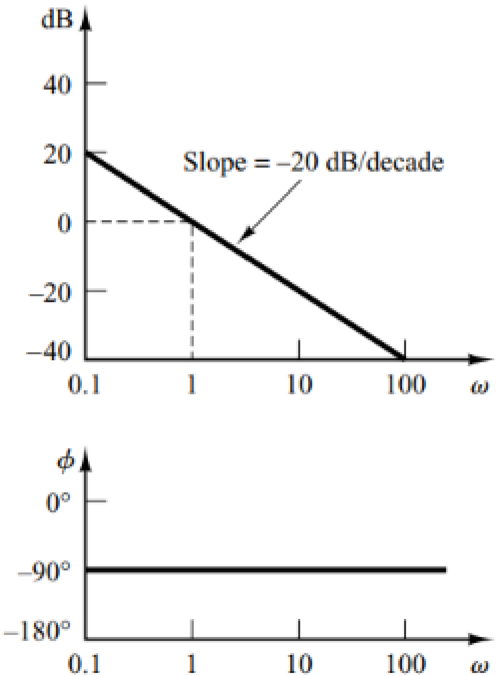
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - عامل انتگرال یا مشتق

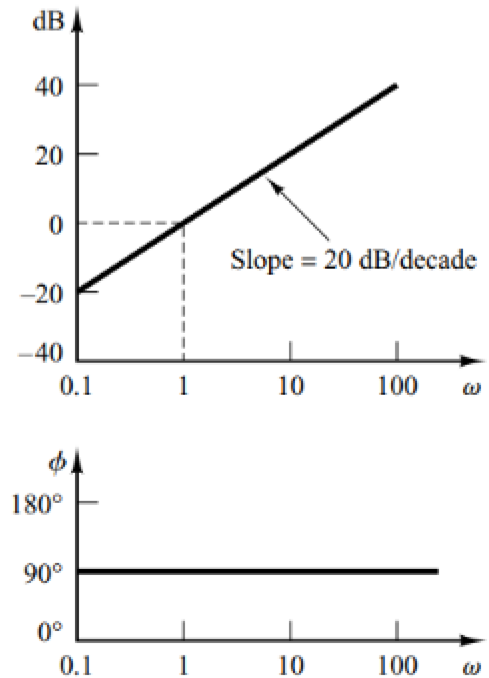
Integral and Derivative Factors $(j\omega)^{\mp 1}$

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$



Bode diagram of
$G(j\omega) = 1/j\omega$



Bode diagram of
$G(j\omega) = j\omega$

✓ با توان بالاتر

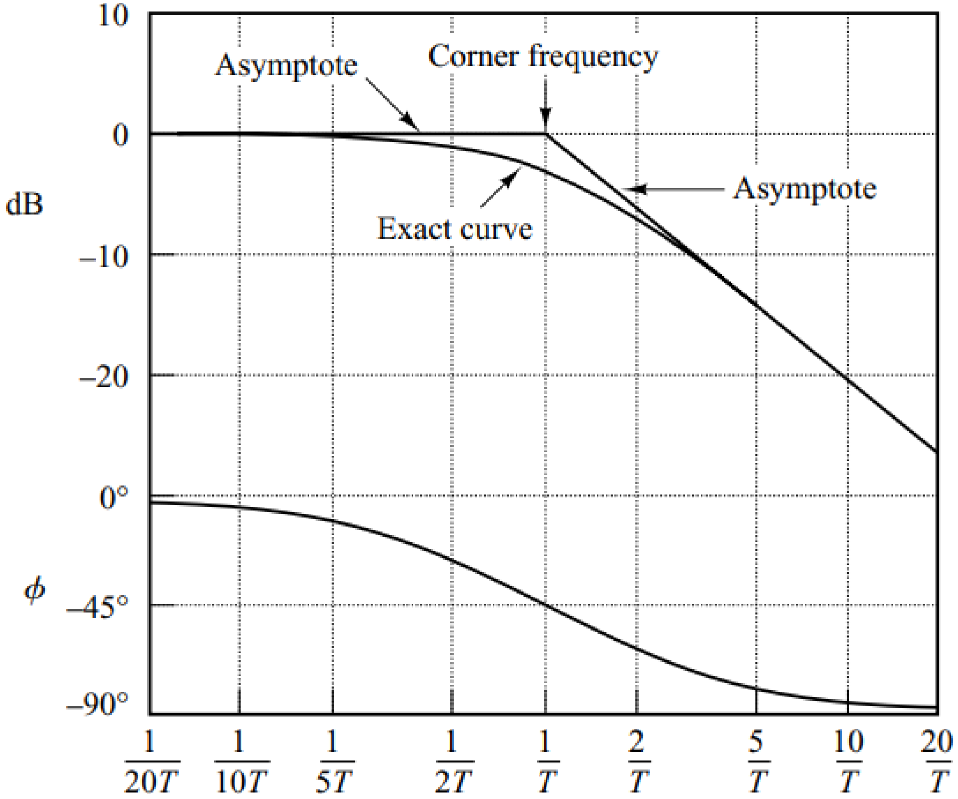
$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega \text{ dB}$$

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega \text{ dB}$$

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - عامل مرتبه اول

First-Order Factors $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$



- توان منفی
  - ✓ دیاگرام اندازه

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

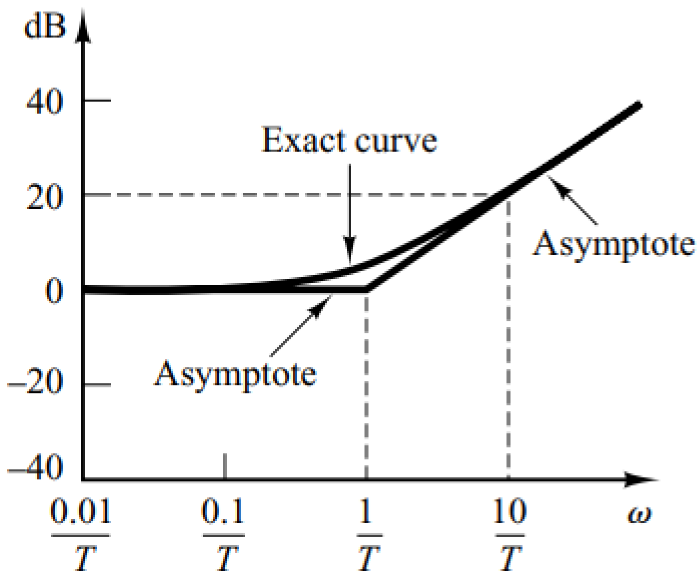
- ✓ دیاگرام فاز

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

دیاگرام بود و نایکوئیست

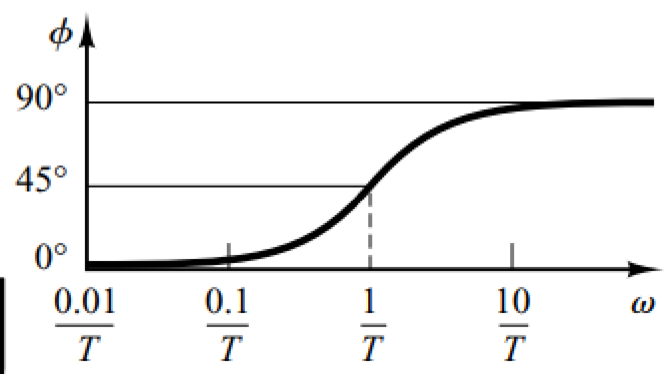
- دیاگرام بود (Bode)
  - عامل مرتبه اول

First-Order Factors $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$



  - توان مثبت
    - دیاگرام اندازه

$$20 \log|1 + j\omega T| = -20 \log\left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right|$$



    - دیاگرام فاز

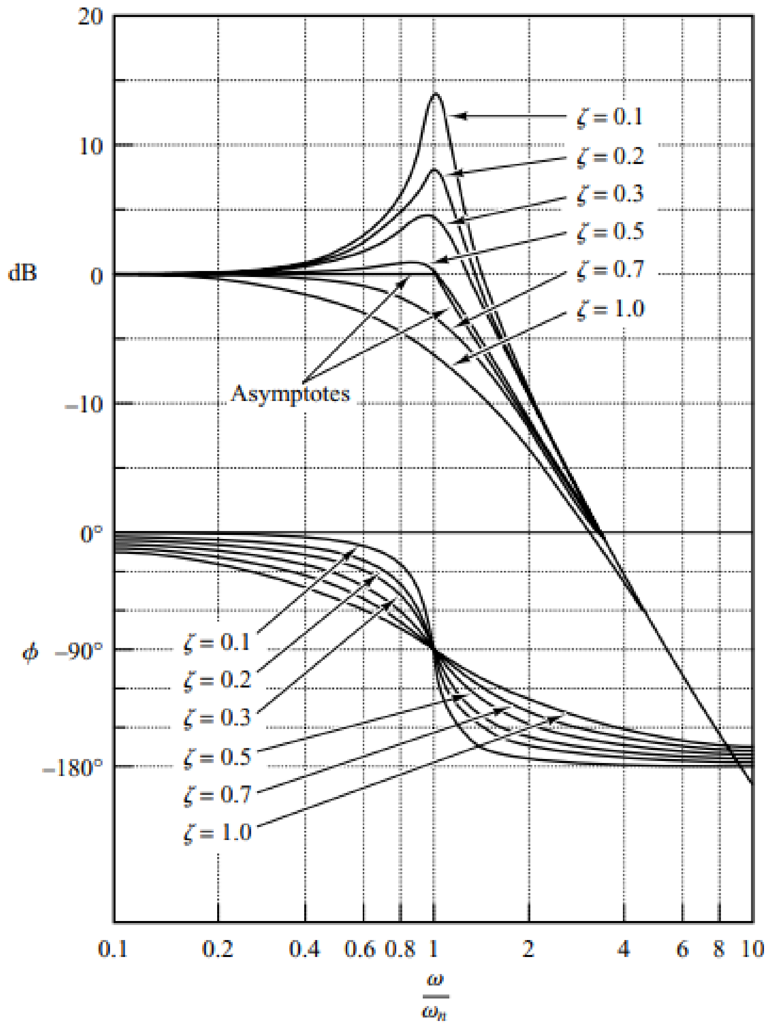
$$\underline{/1 + j\omega T} = \tan^{-1}\omega T = -\underline{\Big/\frac{1}{1 + j\omega T}}$$

دیاگرام بود و نایکوئیست

❑ دیاگرام بود (Bode)

❖ عامل مرتبه دوم

Quadratic Factors $\left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{\mp 1}$



✓ دیاگرام اندازه

$$20\log\left|\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

✓ دیاگرام فاز

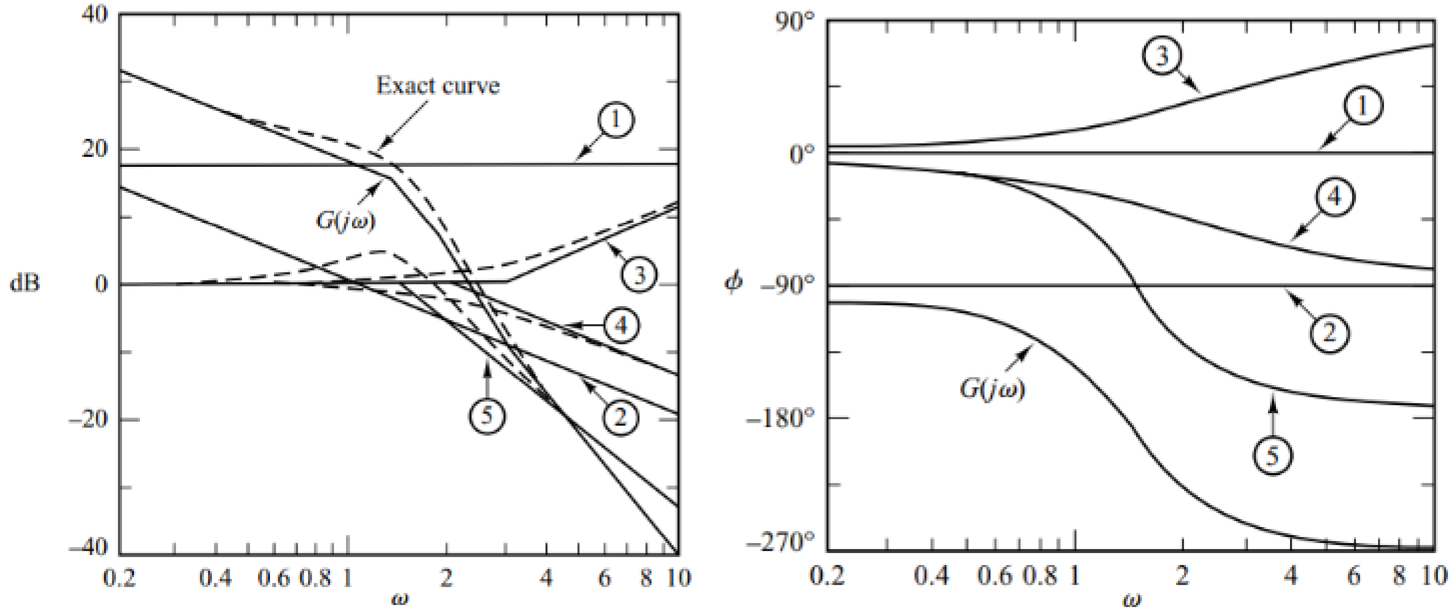
$$\phi = \angle\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

دیاگرام بود و نایکوئیست

- ❑ دیاگرام بود (Bode)
  - ❖ مثال

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)\left[(j\omega)^2 + j\omega + 2\right]} \rightarrow G(j\omega) = \frac{7.5\left(\dfrac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega)\left(\dfrac{j\omega}{2} + 1\right)\left[\dfrac{(j\omega)^2}{2} + \dfrac{j\omega}{2} + 1\right]}$$

$$\rightarrow 7.5, \quad (j\omega)^{-1}, \quad 1 + j\frac{\omega}{3}, \quad \left(1 + j\frac{\omega}{2}\right)^{-1}, \quad \left[1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1} \rightarrow \omega = 3, \omega = 2, \text{ and } \omega = \sqrt{2}$$



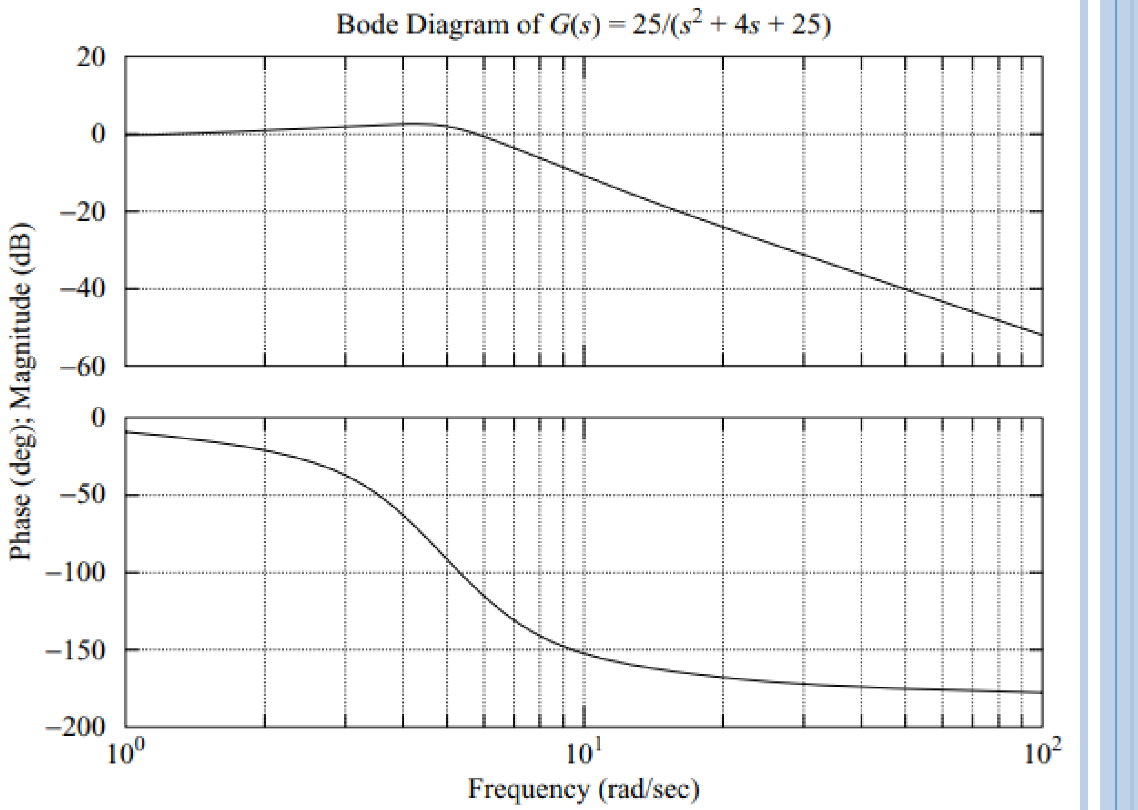
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - مثال

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

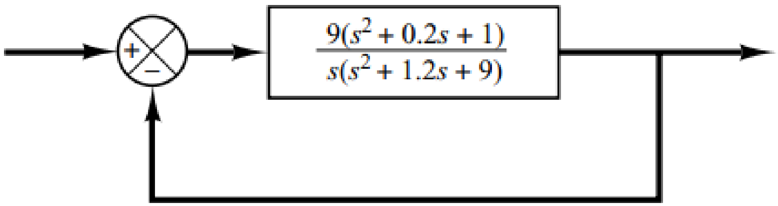
MATLAB Program 7–1

```
num = [25];
den = [1  4  25];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)')
```



دیاگرام بود و نایکوئیست

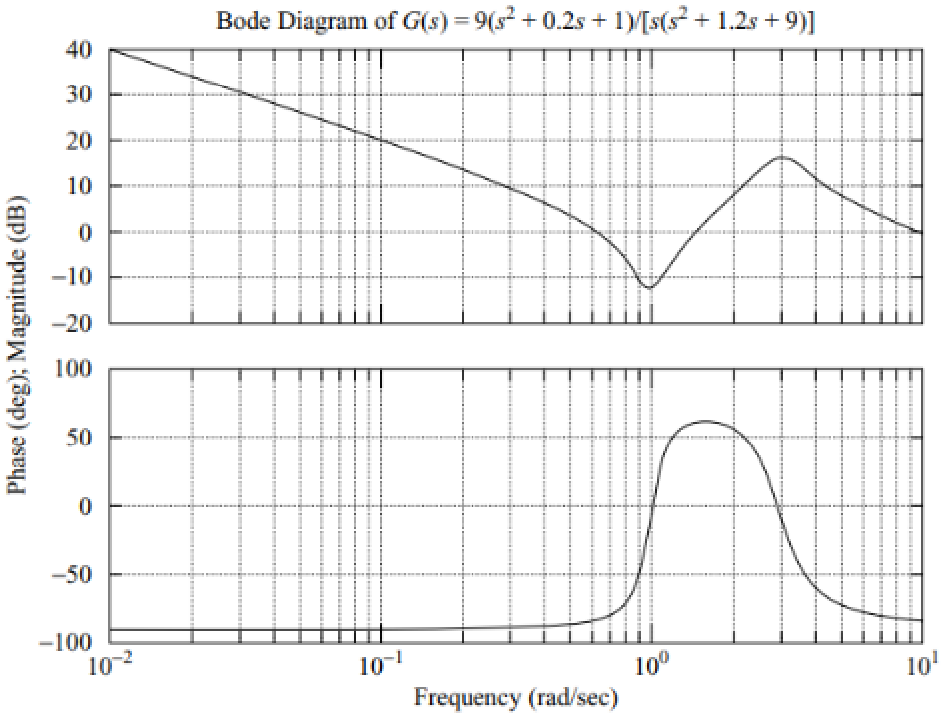
- دیاگرام بود (Bode)
  - مثال



$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

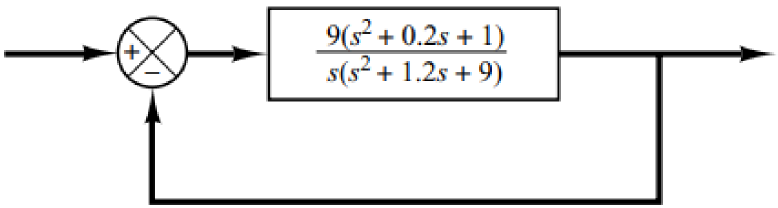
MATLAB Program 7–2

```
num = [9  1.8  9];
den = [1  1.2  9  0];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')
```



دیاگرام بود و نایکوئیست

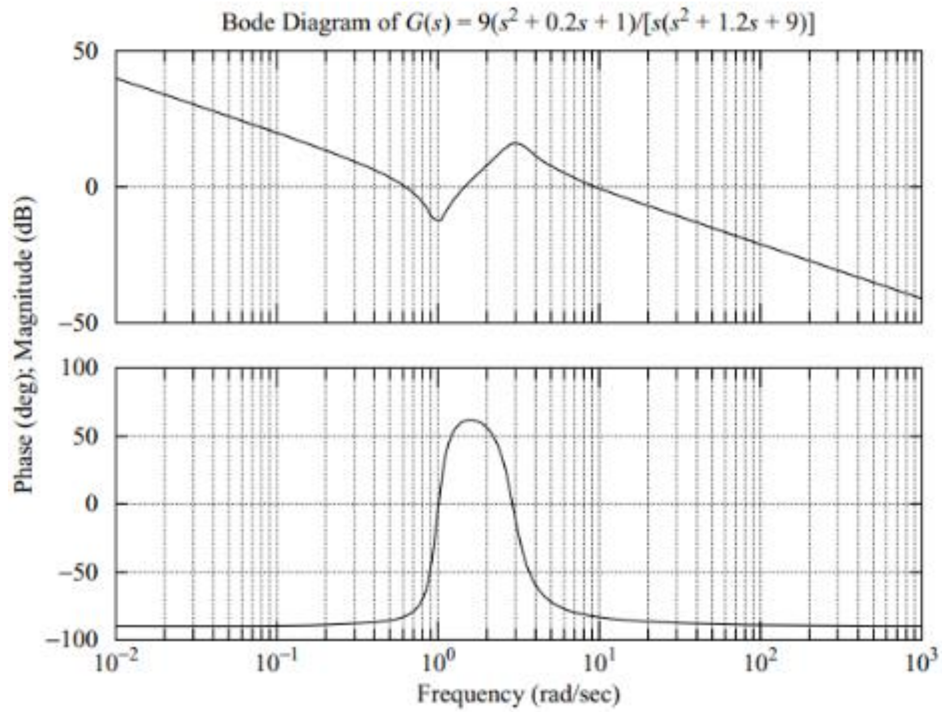
- دیاگرام بود (Bode)
  - مثال



$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

MATLAB Program 7–3

```
num = [9  1.8  9];
den = [1  1.2  9  0];
w = logspace(-2,3,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')
```



دیاگرام بود و نایکوئیست

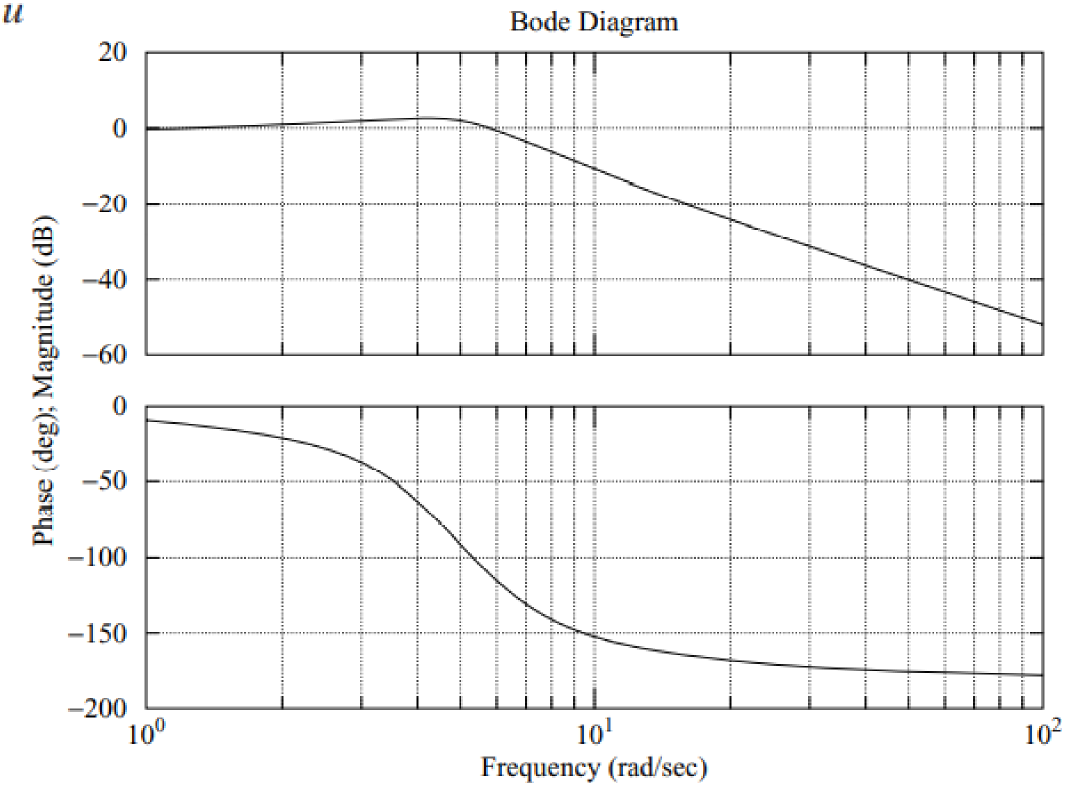
- دیاگرام بود (Bode)
  - مثال

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

MATLAB Program 7–4

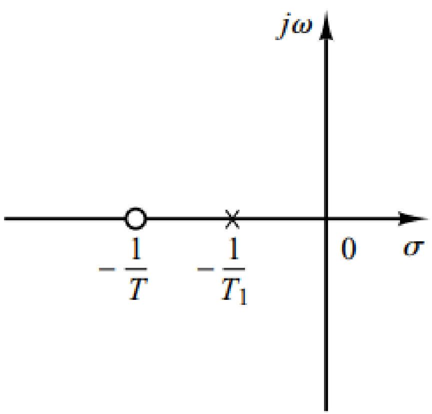
```
A = [0  1;-25  -4];
B = [0;25];
C = [1  0];
D = [0];
bode(A,B,C,D)
title('Bode Diagram')
```



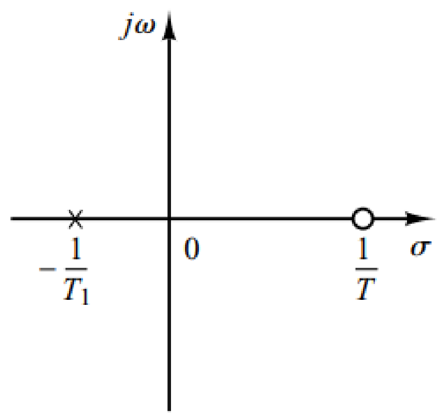
دیاگرام بود و نایکوئیست

- ❑ دیاگرام بود (Bode)
  - ❖ سیستم های مینیموم فاز و غیرمینیموم فاز
    - ✓ اندازه یکسان، تغییر فاز در فرکانس های بالا

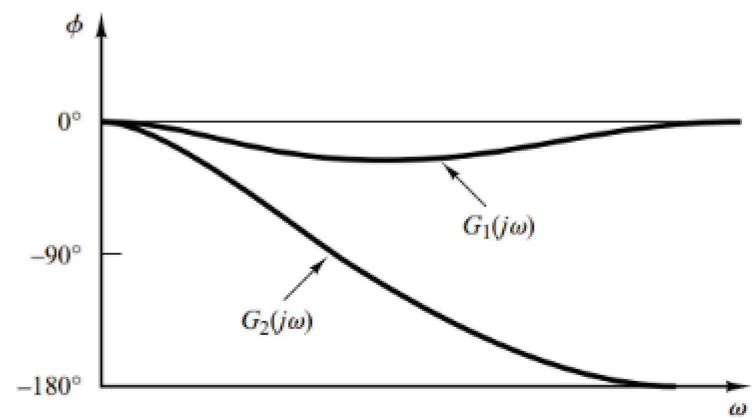
$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \qquad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \qquad 0 < T < T_1$$



$$G_1(s) = \frac{1 + Ts}{1 + T_1 s}$$



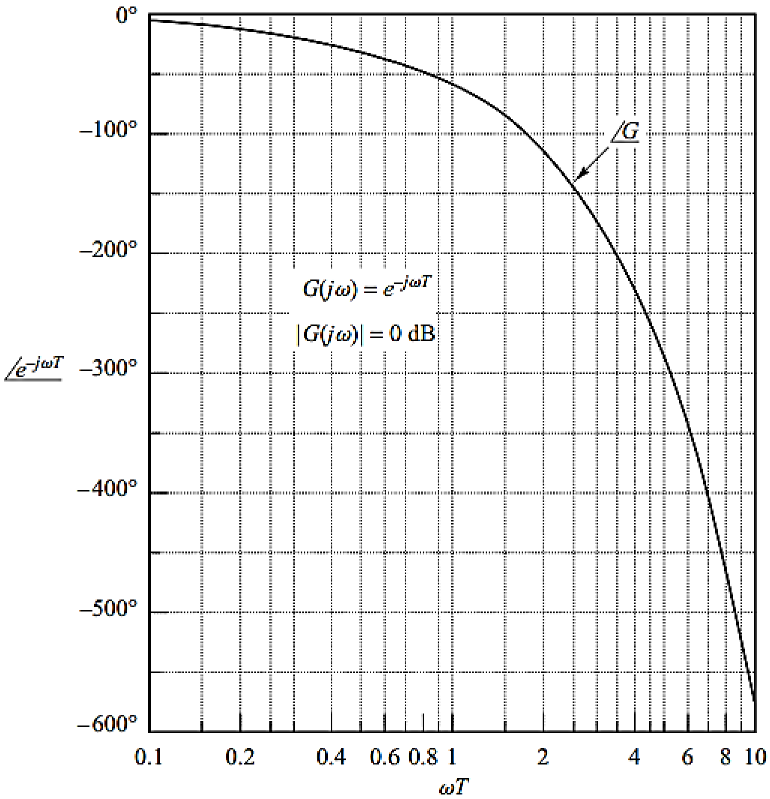
$$G_2(s) = \frac{1 - Ts}{1 + T_1 s}$$



دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - تاثیر تاخیر بر روی نمودار (Delay, Dead Time, Lag)
    - ✓ تابع تبدیل تاخیر

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

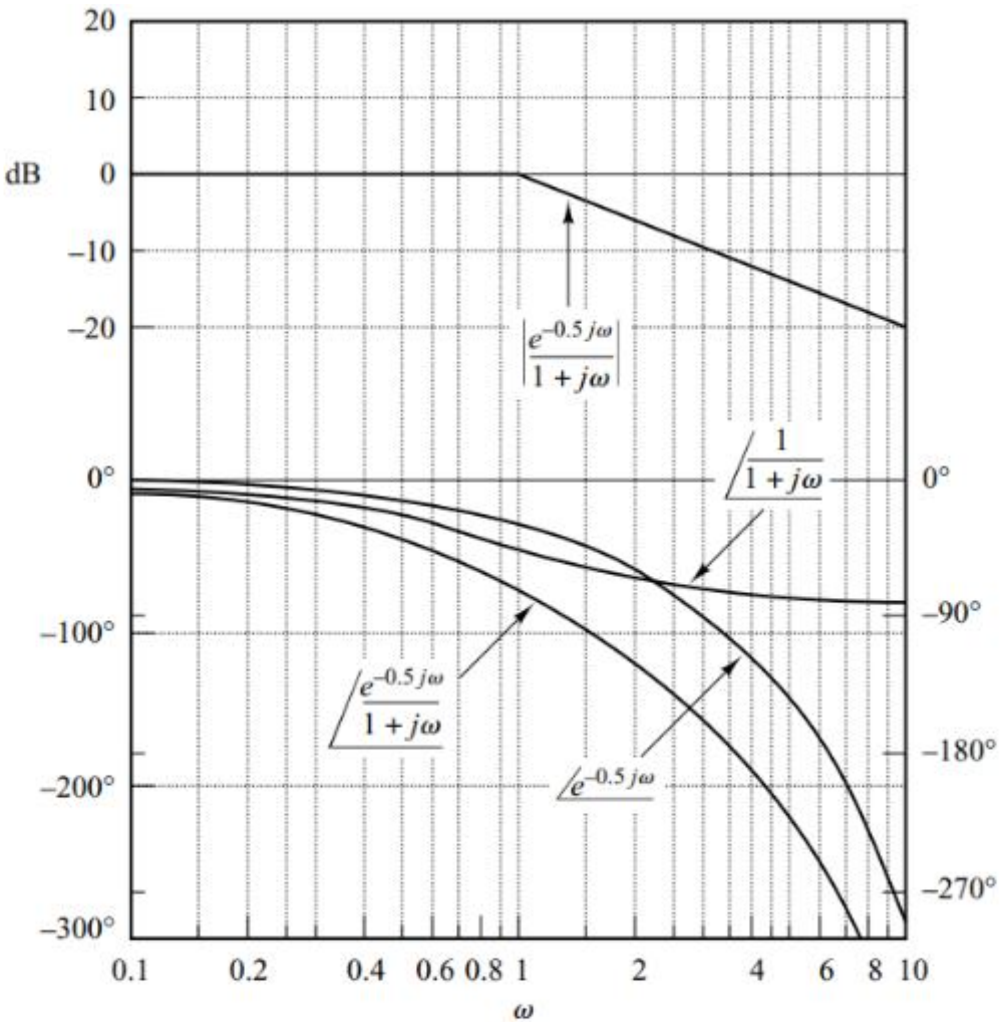


$$|G(j\omega)| = |\cos\omega T - j\sin\omega T| = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\omega T \qquad \text{(radians)}$$
$$= -57.3\,\omega T \qquad \text{(degrees)}$$

- ✓ تاثیری بر روی اندازه ندارد.
- ✓ زاویه فاز با افزایش فرکانس کاهش پیدا می کند.

دیاگرام بود و نایکوئیست



- دیاگرام بود (Bode)
  - مثال

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

✓ دیاگرام اندازه

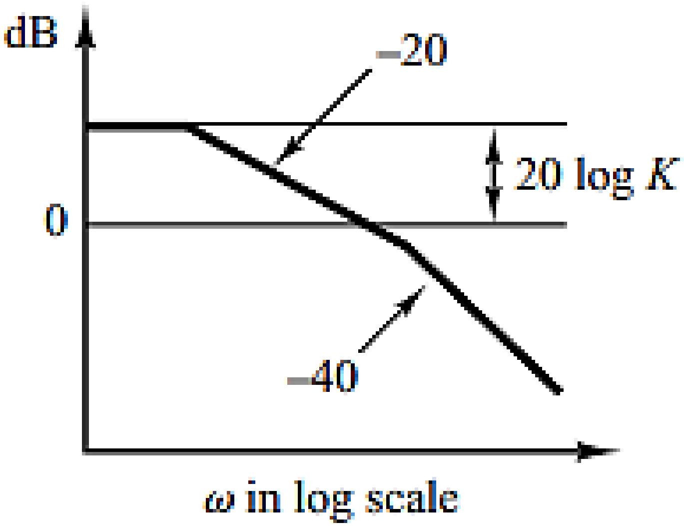
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log|e^{-j\omega L}| + 20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|$$
$$= 0 + 20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|$$

✓ دیاگرام فاز

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle\frac{1}{1+j\omega T}$$
$$= -\omega L - \tan^{-1}\omega T$$

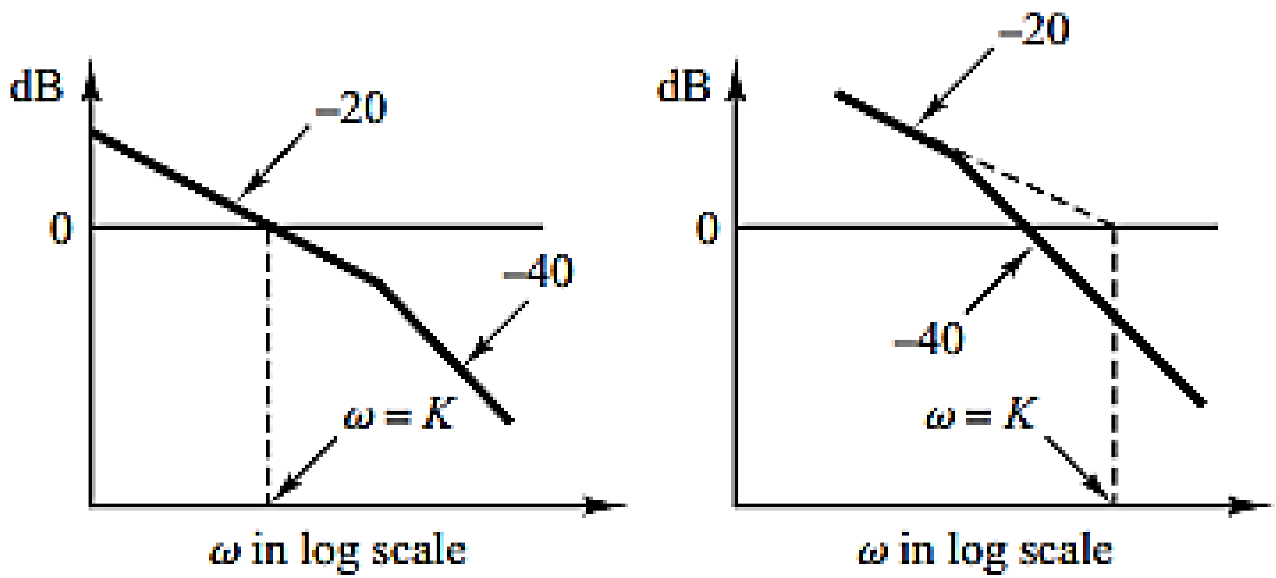
دیاگرام بود و نایکوئیست

- ❑ دیاگرام بود (Bode)
  - ✓ تعیین ضریب K از روی دیاگرام بود: سیستم نوع •



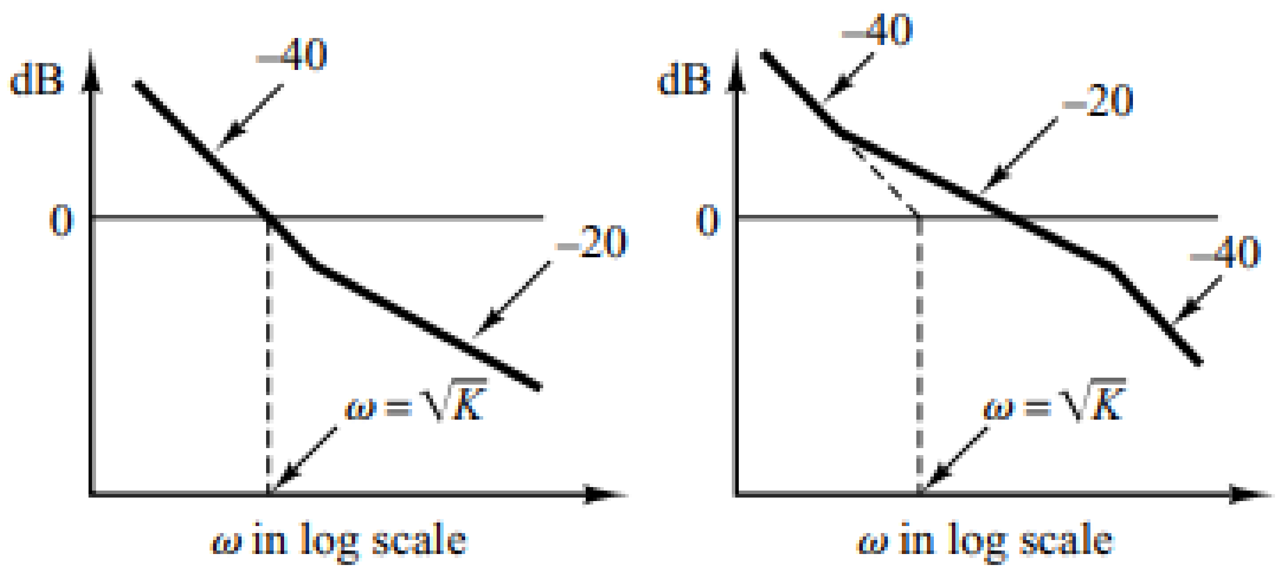
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - ✓ تعیین ضریب K از روی دیاگرام بود: سیستم نوع ۱



دیاگرام بود و نایکوئیست

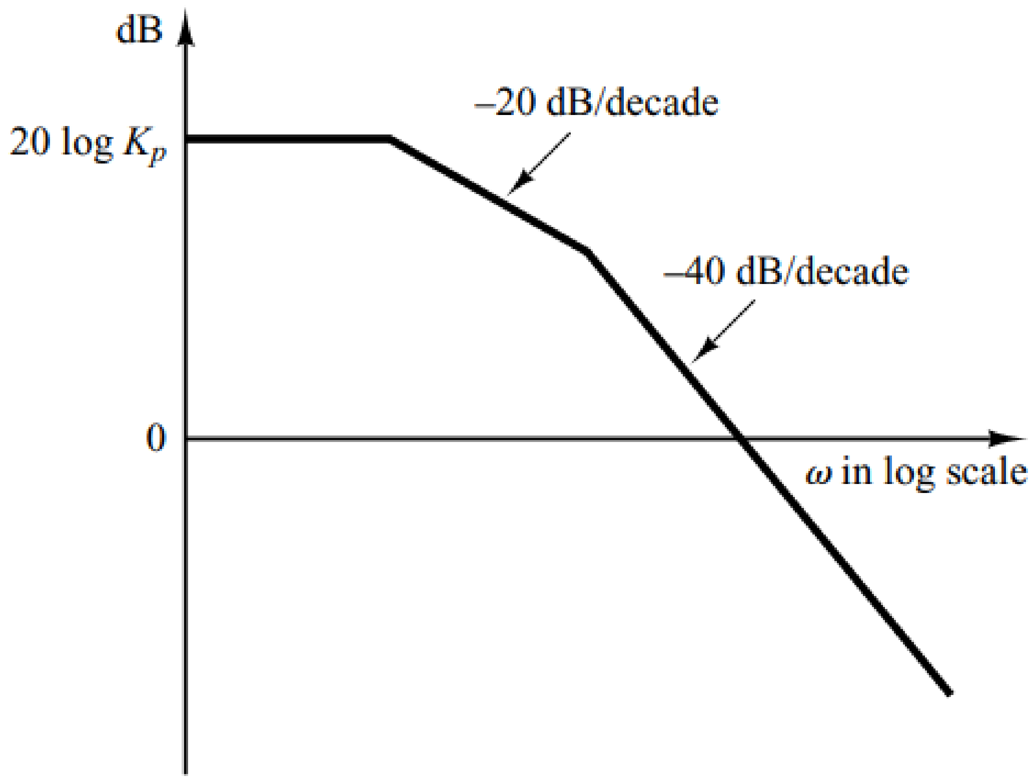
- دیاگرام بود (Bode)
  - ✓ تعیین ضریب K از روی دیاگرام بود: سیستم نوع ۲



دیاگرام بود و نایکوئیست

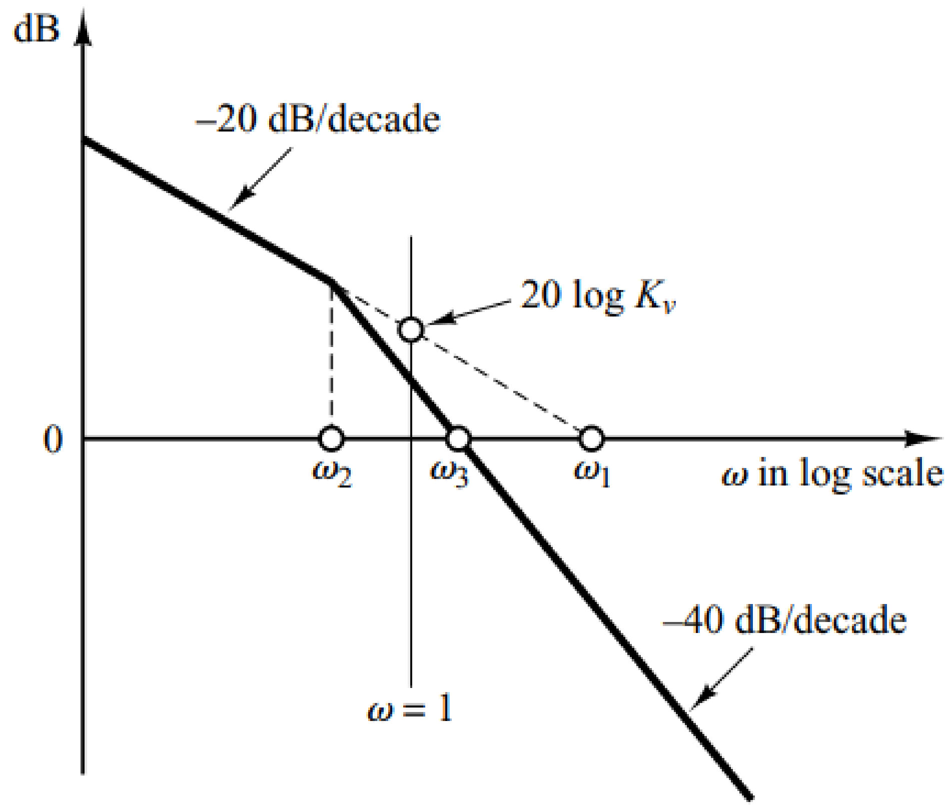
❑ دیاگرام بود (Bode)

✓ تعیین ثابت خطای موقعیت استاتیکی: دیاگرام اندازه در فرکانس صفر در سیستم نوع ۰



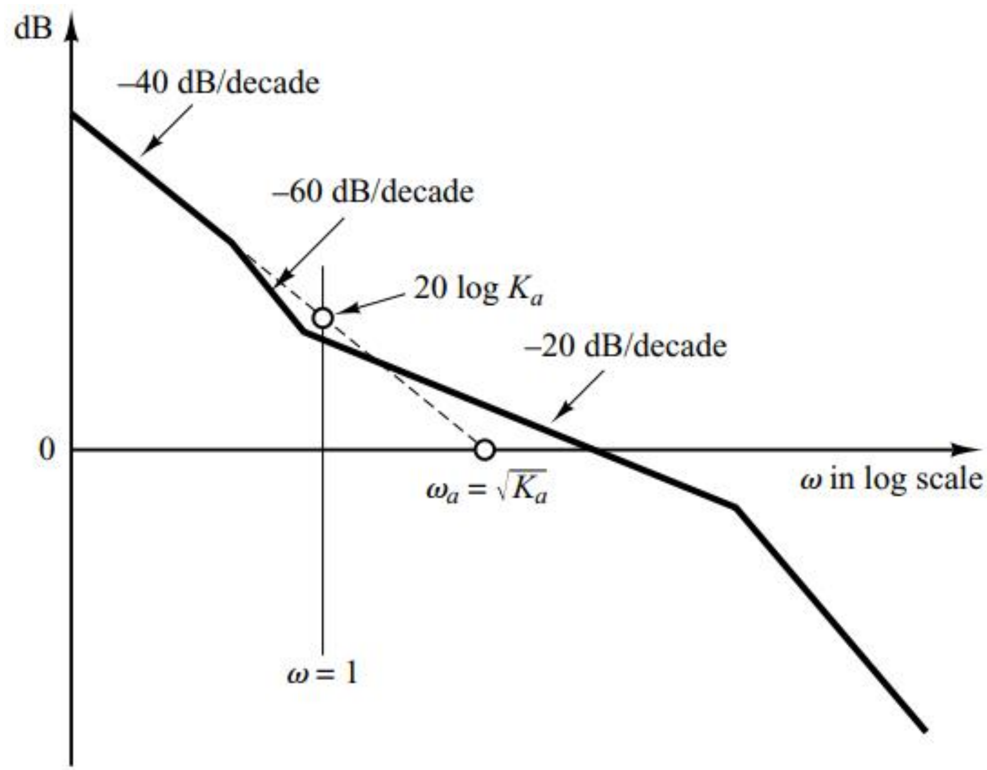
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام بود (Bode)
  - تعیین ثابت خطای سرعت استاتیکی: دیاگرام اندازه در فرکانس یک در سیستم نوع ۱

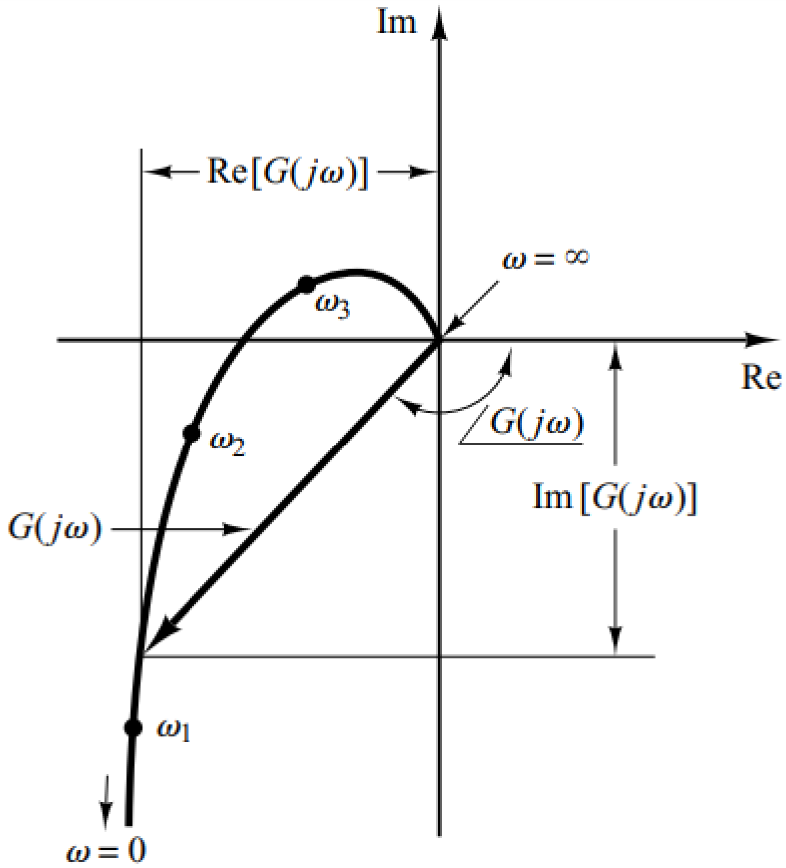


دیاگرام بود و نایکوئیست

- ❑ دیاگرام بود (Bode)
  - ✓ تعیین ثابت خطای موقعیت استاتیکی: دیاگرام اندازه در فرکانس یک در سیستم نوع ۲



دیاگرام بود و نایکوئیست



- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - دیاگرام قطبی تابع تبدیل مدار بسته
    - برای تغییر فرکانس از صفر تا بینهایت

$$|G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

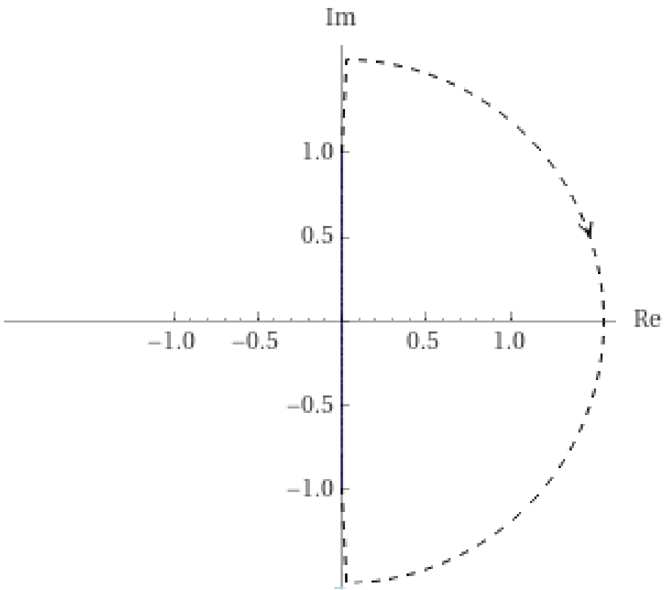
  - رسم با استفاده از دو روش:
    - مولفه حقیقی و موهومی
    - اندازه و زاویه فاز

دیاگرام بود و نایکوئیست

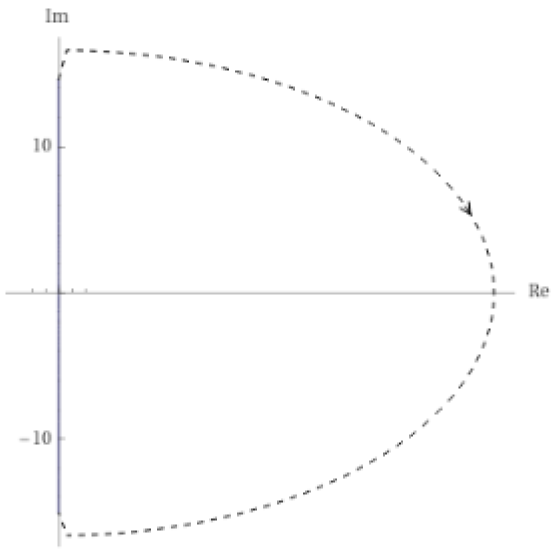
- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - عامل مشتق و انتگرال:
    - روی محور موهومی

Integral and Derivative Factors $(j\omega)^{\mp 1}$

$$G(j\omega) = j\omega$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\,\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\,\angle -90^\circ$$

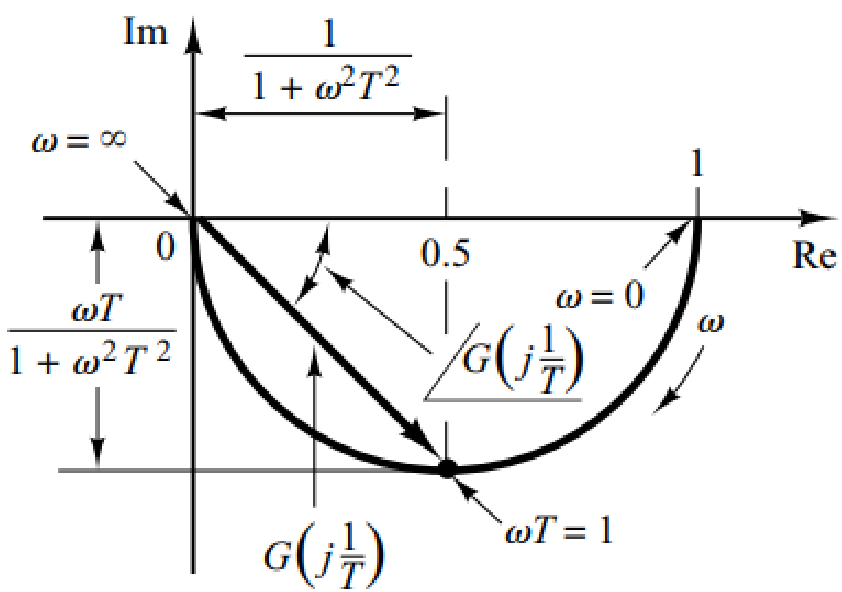


دیاگرام بود و نایکوئیست

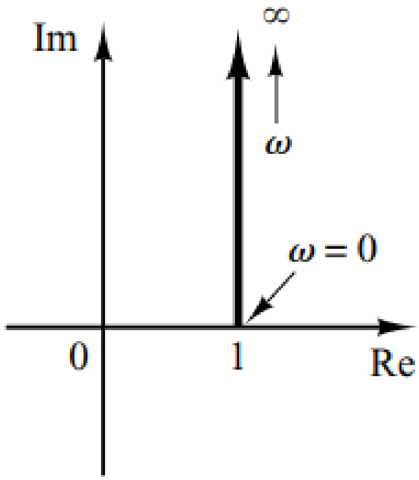
- ❑ دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - ❖ عامل مرتبه اول:

First-Order Factors $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \underline{/-\tan^{-1}\omega T}$$



$1 + j\omega T$

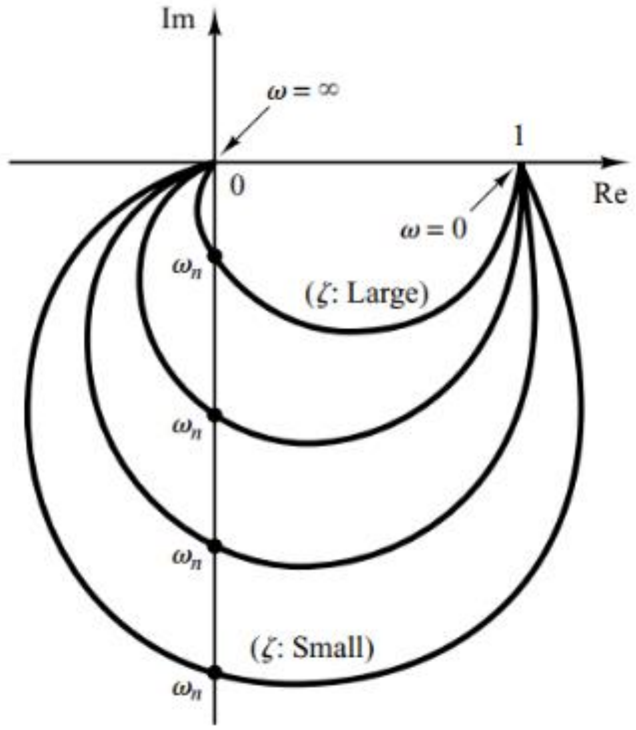


دیاگرام بود و نایکوئیست

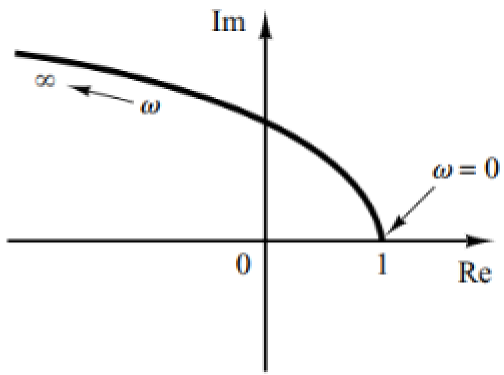
- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - عامل مرتبه دوم:

$$\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Quadratic Factors $\left[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2\right]^{\mp 1}$



$$1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

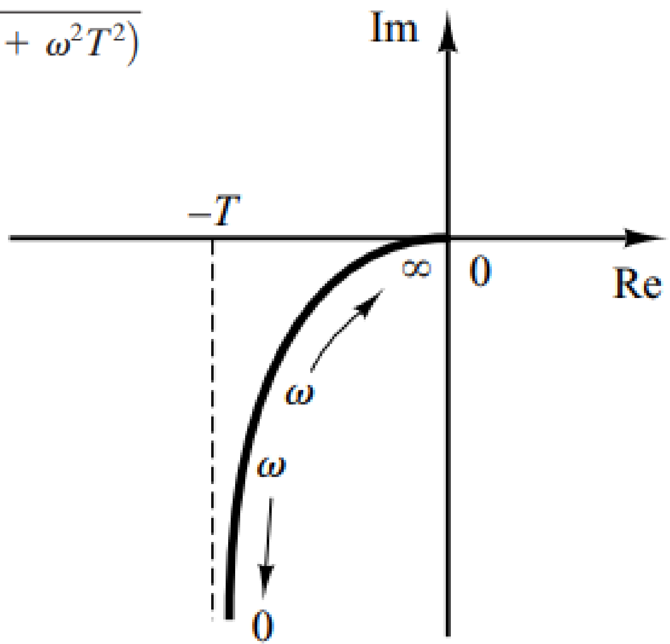


دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T)} = -\frac{T}{1+\omega^2T^2} - j\frac{1}{\omega(1+\omega^2T^2)}$$



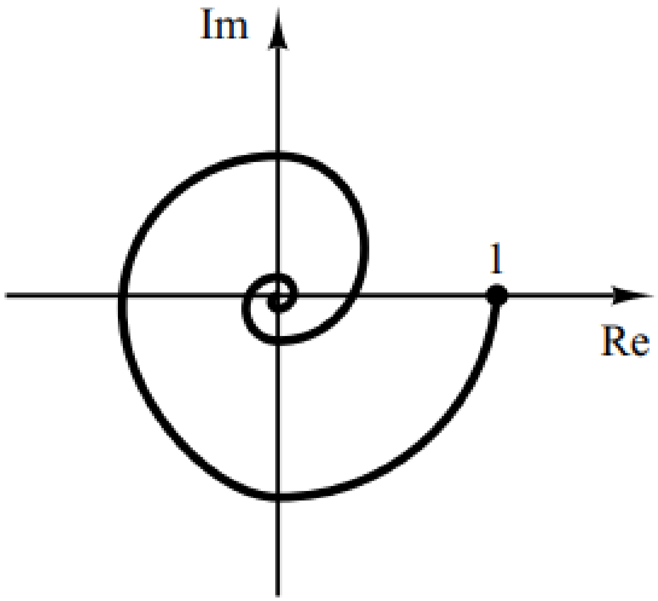
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

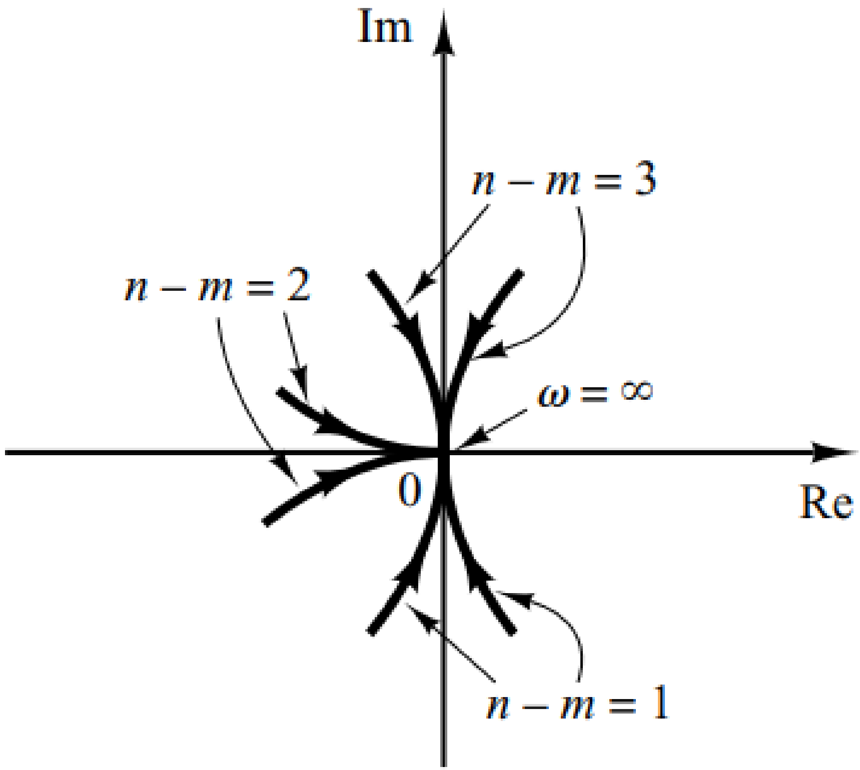
$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$



دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - شکل کلی دیاگرام نایکوئیست
    - ✓ بر اساس اختلاف تعداد صفر و قطب

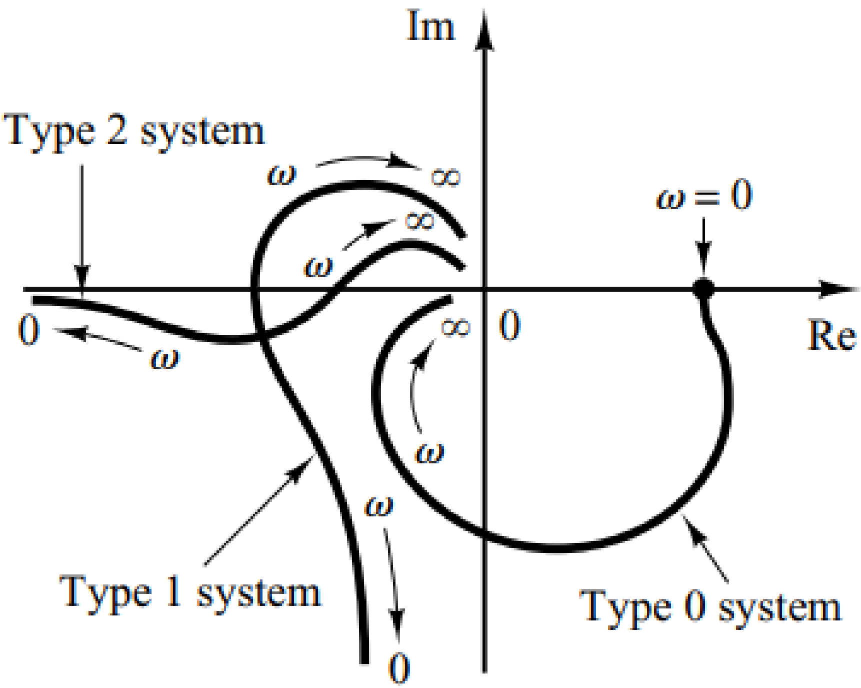


دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - شکل کلی دیاگرام نایکوئیست
    - بر اساس نوع سیستم

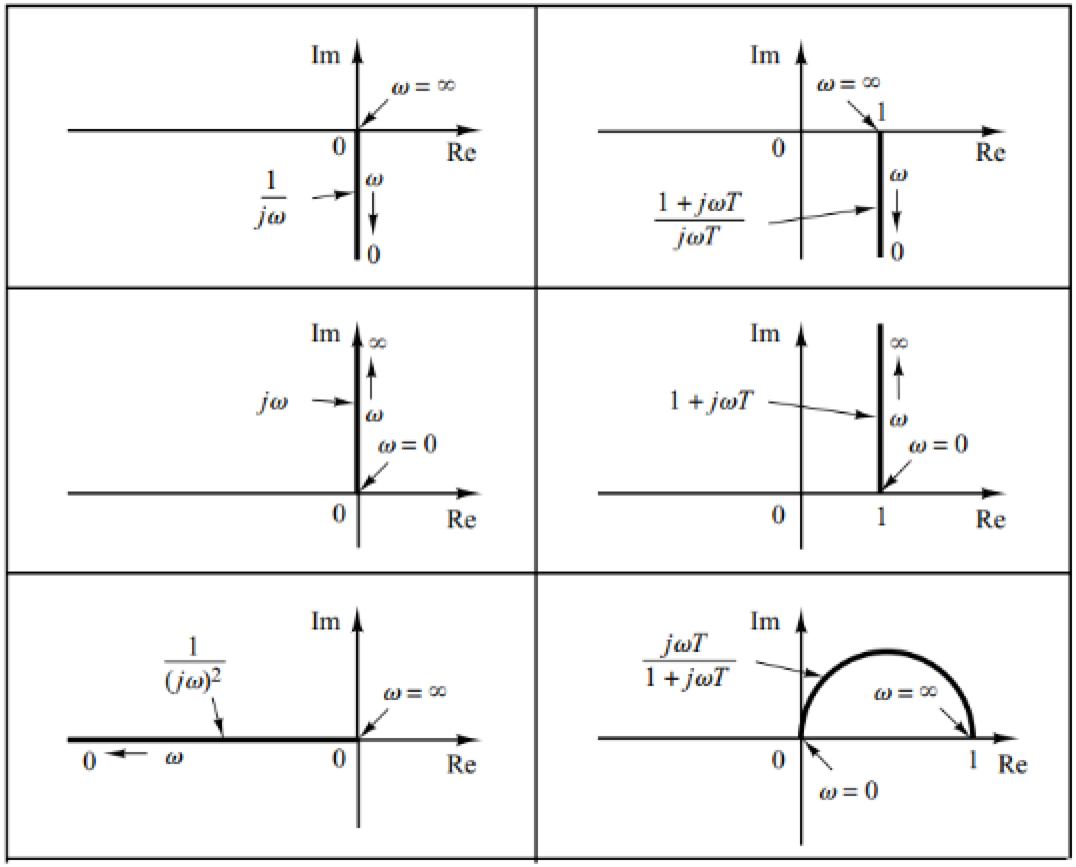
$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)^{\lambda}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)\cdots}$$

$$= \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots}$$



دیاگرام بود و نایکوئیست

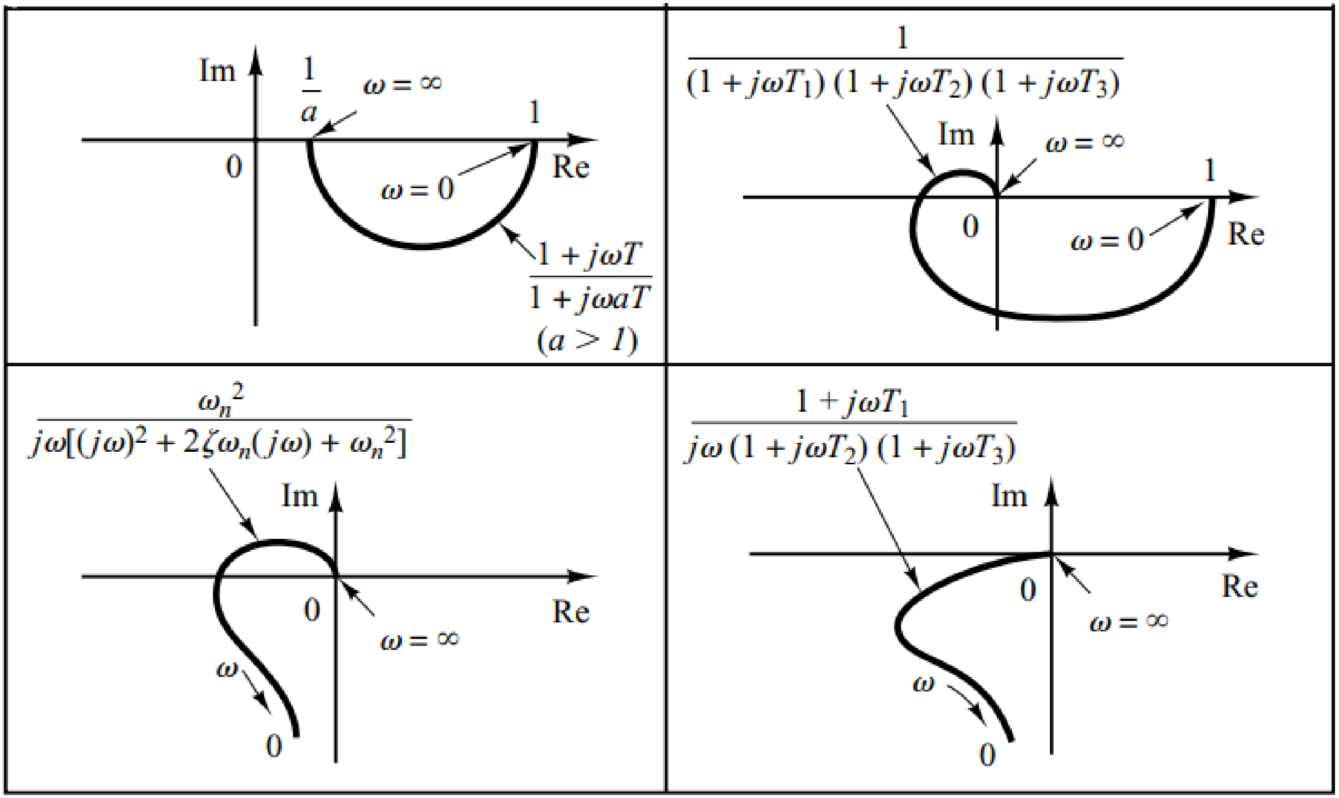
- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - نمونه های دیاگرام نایکوئیست



دیاگرام بود و نایکوئیست

❑ دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)

❖ نمونه های دیاگرام نایکوئیست



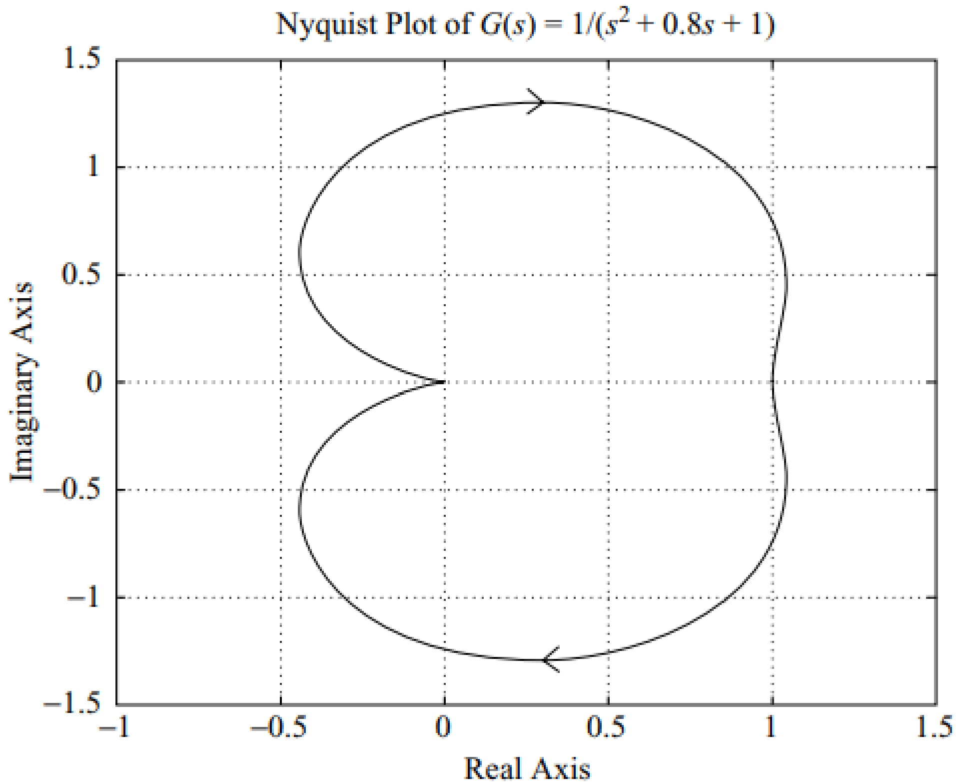
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

MATLAB Program 7–5

```
num = [1];
den = [1  0.8  1];
nyquist(num,den)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')
```



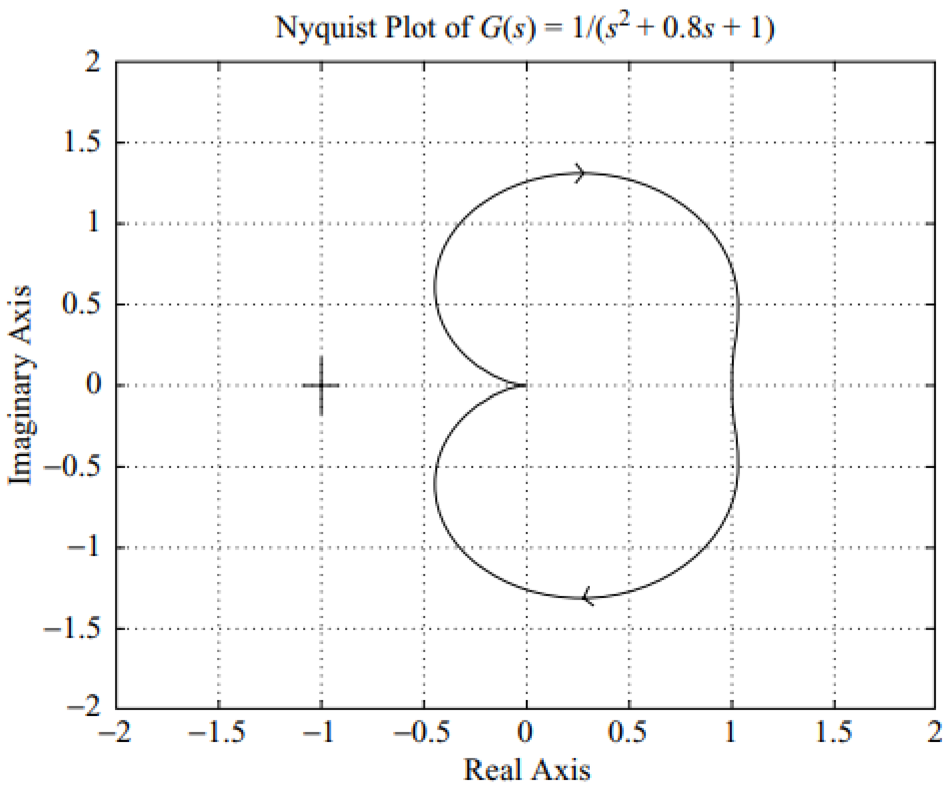
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

MATLAB Program 7–6

```
% ---------- Nyquist plot ----------

num = [1];
den = [1  0.8  1];
nyquist(num,den)
v = [-2  2  -2  2]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')
```

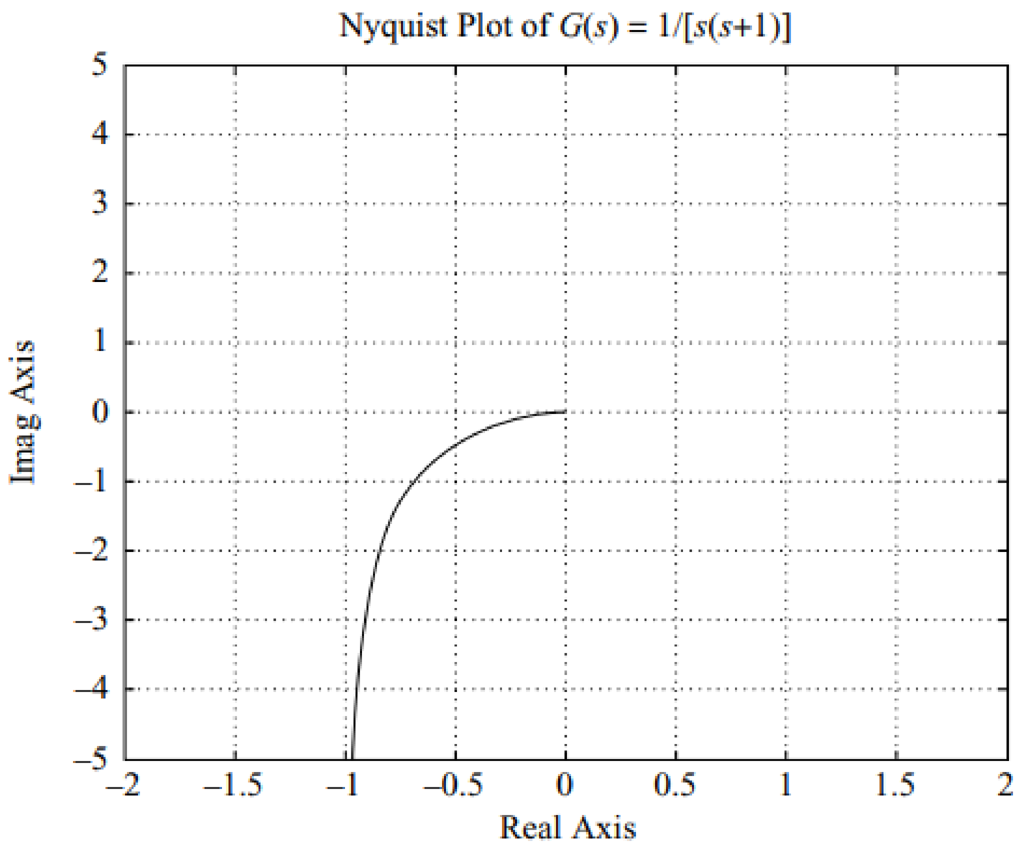


دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

MATLAB Program 7–8

```
% ---------- Nyquist plot----------

num = [1];
den = [1  1  0];
w = 0.1:0.1:100;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im)
v = [-2  2  -5  5]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/[s(s + 1)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



دیاگرام بود و نایکوئیست

❑ دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)

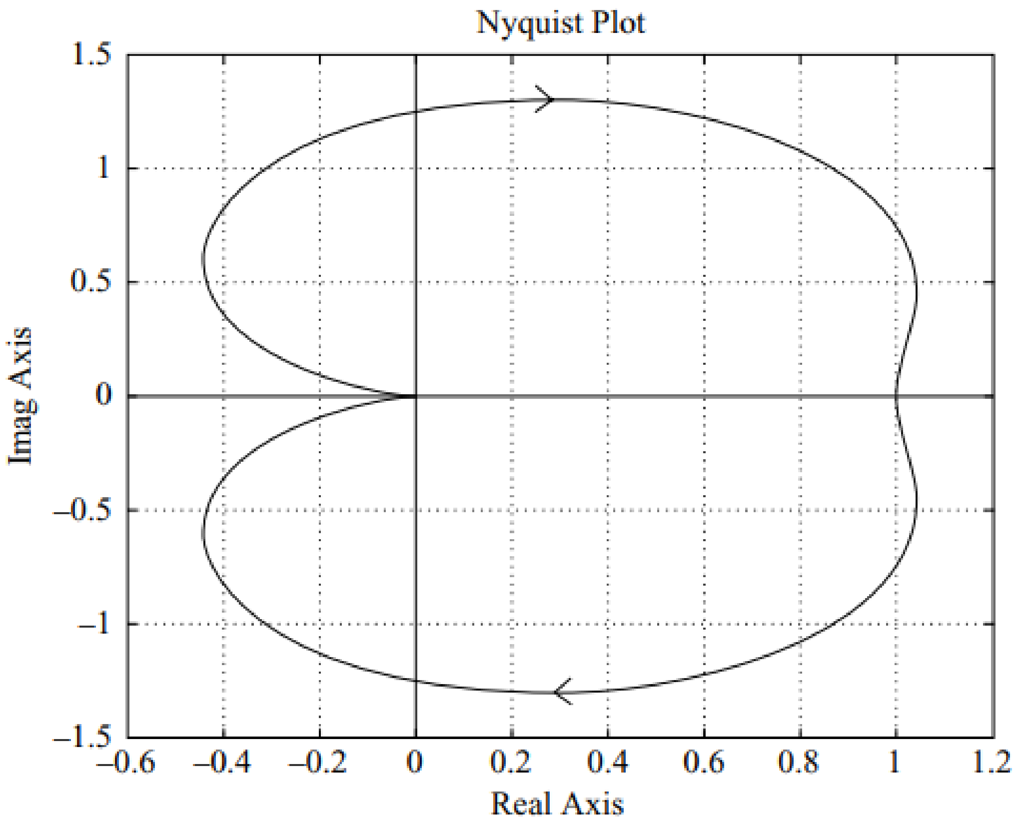
❖ مثال

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

MATLAB Program 7–9

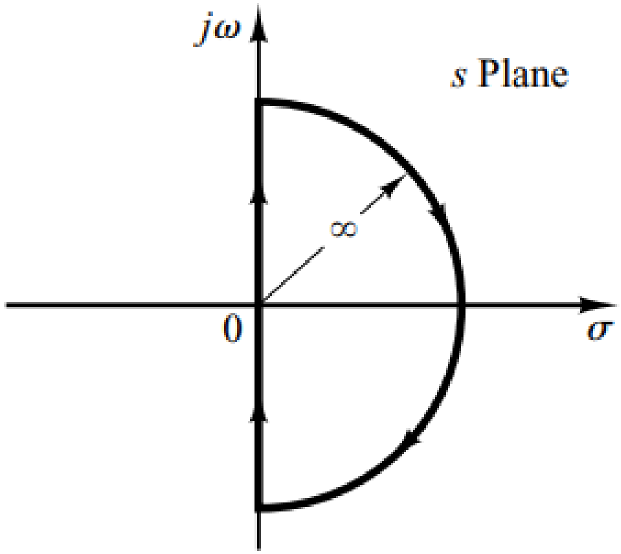
```
A = [0  1;-25  -4];
B = [0;25];
C = [1  0];
D = [0];
nyquist(A,B,C,D)
grid
title('Nyquist Plot')
```



دیاگرام بود و نایکوئیست

- ❑ دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - ❖ قضیه انتقال (Mapping Theorem):

✓ در صورت نگاشت یک منحنی بسته در صفحه مختلط (s) توسط یک تابع تبدیل G(s)، منحنی بسته ای ایجاد می شود. تعداد دورهای ساعت گرد (N) منحنی نگاشت حول مبدا برابر با تعداد صفرها (Z) منهای تعداد قطب های (P) تابع تبدیل نگاشت در منحنی بسته اولیه خواهد بود:

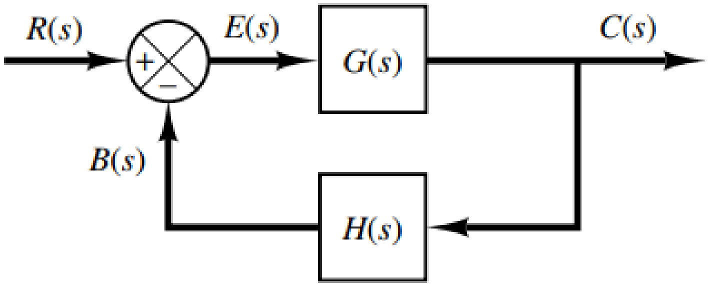


$$N = Z - P$$

✓ برای استفاده از این قضیه در بررسی پایداری، منحنی اولیه نیم صفحه راست محور موهومی انتخاب می شود.

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - یادآوری مفهوم صفرها و قطب های تابع تبدیل مدار بسته و مدار باز



✓ تابع تبدیل مدار باز $\rightarrow G(s)H(s)$

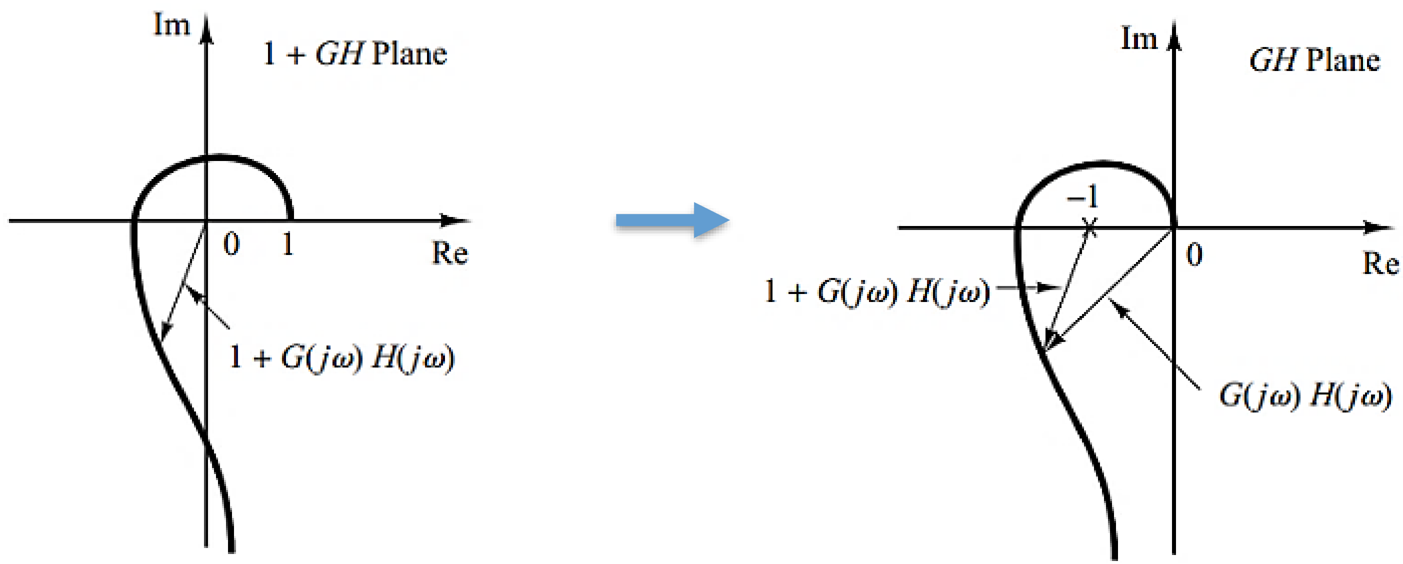
- صفرها: صورت تابع تبدیل GH = صفر
- قطب ها: مخرج تابع تبدیل GH = صفر

✓ تابع تبدیل مدار بسته $\rightarrow \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

- در مورد صفرها و قطب های تابع تبدیل مدار بسته نمی توان به سادگی اظهار نظر کرد.
- قطب های 1+GH همان قطب های GH هستند.
- صفرهای 1+GH قطب های سیستم مدار بسته هستند.

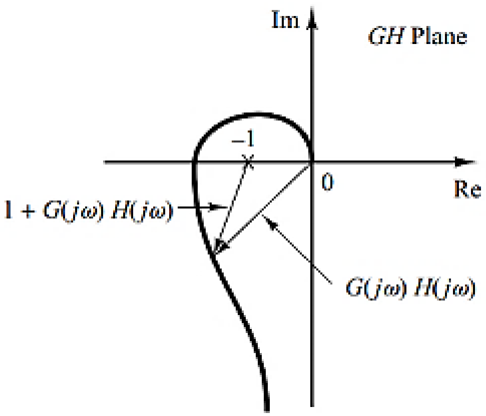
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - قضیه پایداری نایکوئیست
    - برای پایداری سیستم، تمام قطب های مداربسته (ریشه های 1+GH=0) باید در سمت چپ محور موهومی باشند. (ولی با وجود صفرهای سمت راست، می توان پایداری داشت)
    - برای سهولت در رسم، دیاگرام نایکوئیست برای تابع تبدیل مدار باز (GH) رسم می شود و معیار به دور زدن نقطه 1- روی نمودار تغییر می کند.



دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - قضیه پایداری نایکوئیست
    - با این فرضیات، قضیه انتقال به صورت رابطه زیر بیان می شود:



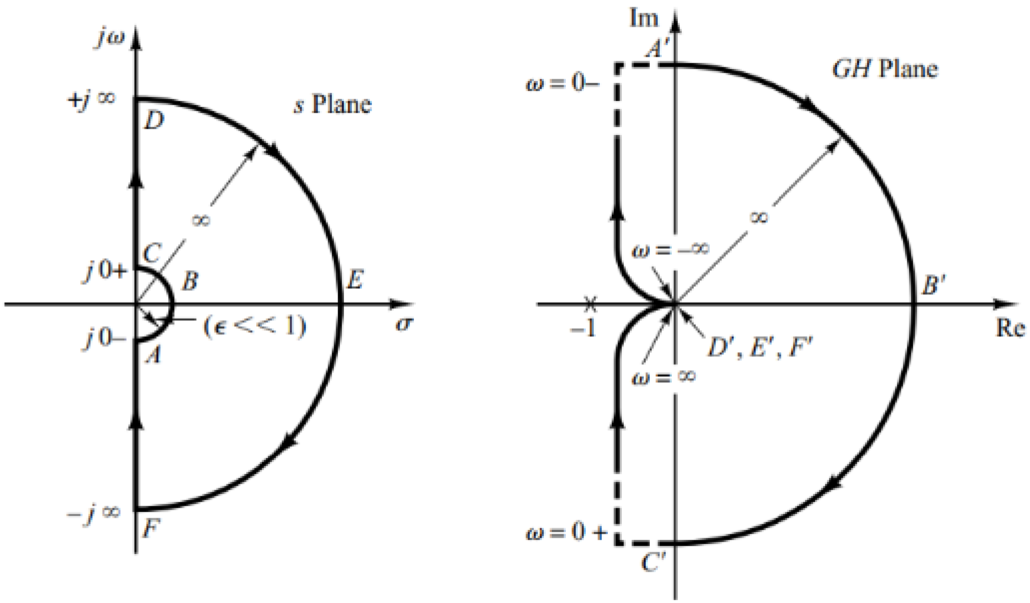
$$Z = N + P$$

Z = number of zeros of $1 + G(s)H(s)$ in the right-half s plane
N = number of clockwise encirclements of the $-1 + j0$ point
P = number of poles of $G(s)H(s)$ in the right-half s plane

- برای پایداری سیستم، باید Z برابر صفر باشد. یعنی باید به تعداد دور زدن ساعت گرد ۱- در دیاگرام نایکوئیست، قطب تابع مدار باز (قطب مخرج تابع مدار بسته) در سمت راست محور موهومی داشته باشیم.

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - **انتخاب مسیر در صورت حضور صفر و یا قطب روی محور موهومی**
    - ✓ در قضیه انتقال منحنی اولیه نباید با صفر و قطب های تابع نگاشت تلاقی داشته باشد.
    - ✓ شکل کلی منحنی تغییری نمی کند، ولی صفرها و قطب های روی محور موهومی با تعریف مسیر مناسب دور زده می شوند.



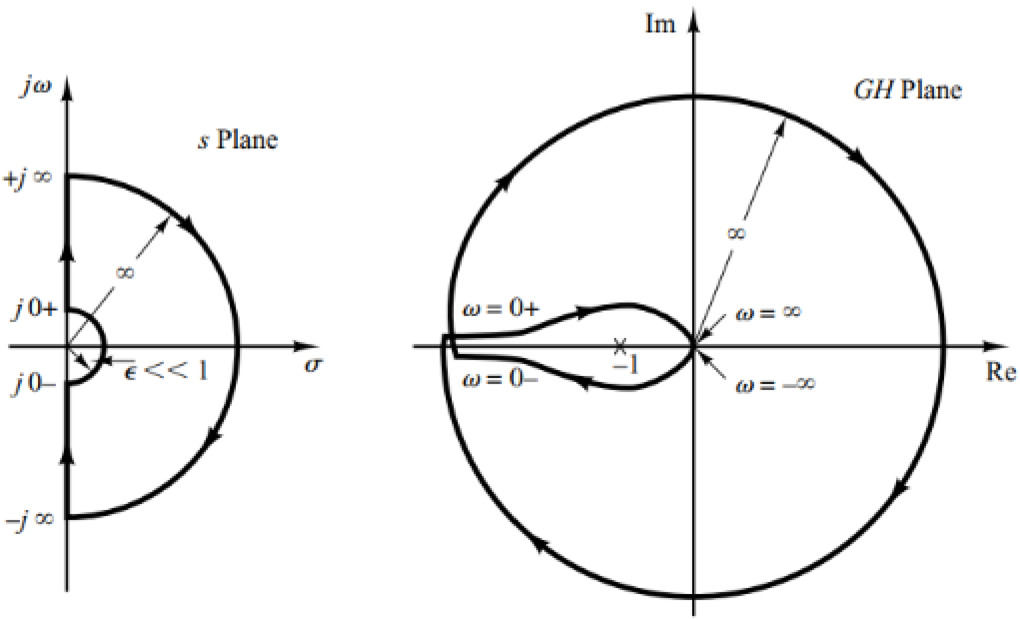
- مثال

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

- ✓ $N = 0 , P = 0 \rightarrow Z = 0$
- ✓ پس سیستم پایدار است.

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

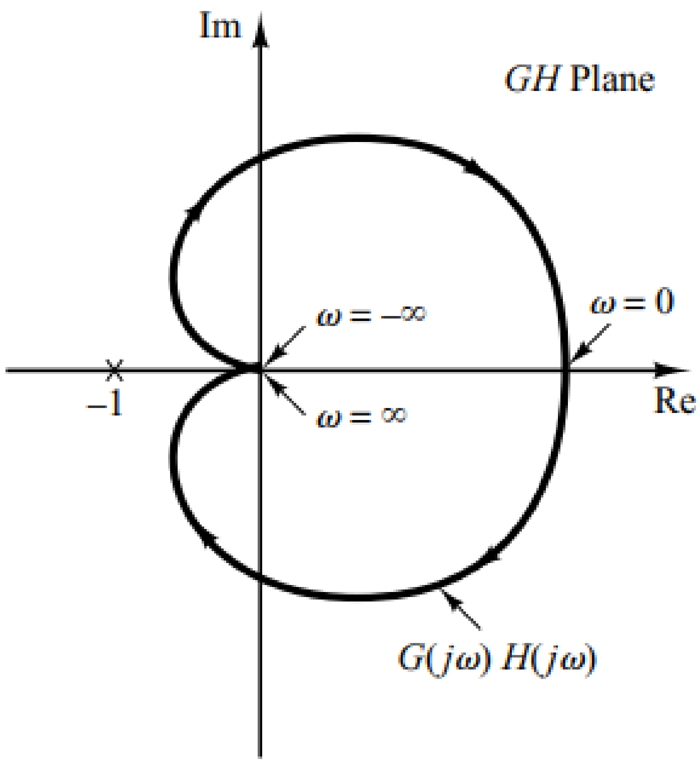


$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

- $N = 2 , P = 0 \Rightarrow Z = 2$
- پس سیستم ناپایدار است.

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال



$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

- ✓ N = 0 , P = 0 ➡ Z = 0
- ✓ پس سیستم پایدار است.

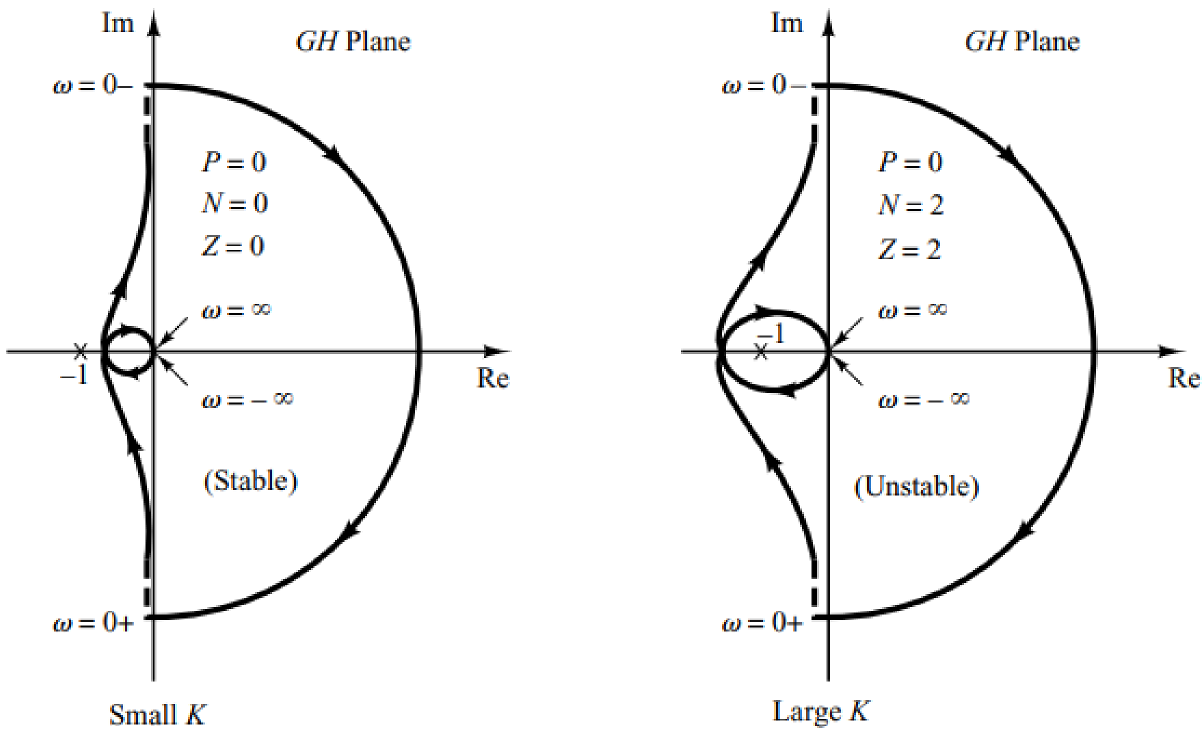
دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

✓ $N = 0$ or 2 , $P = 0$ → $Z = 0$ or 2

✓ پس پایداری سیستم به اندازه K بستگی دارد.



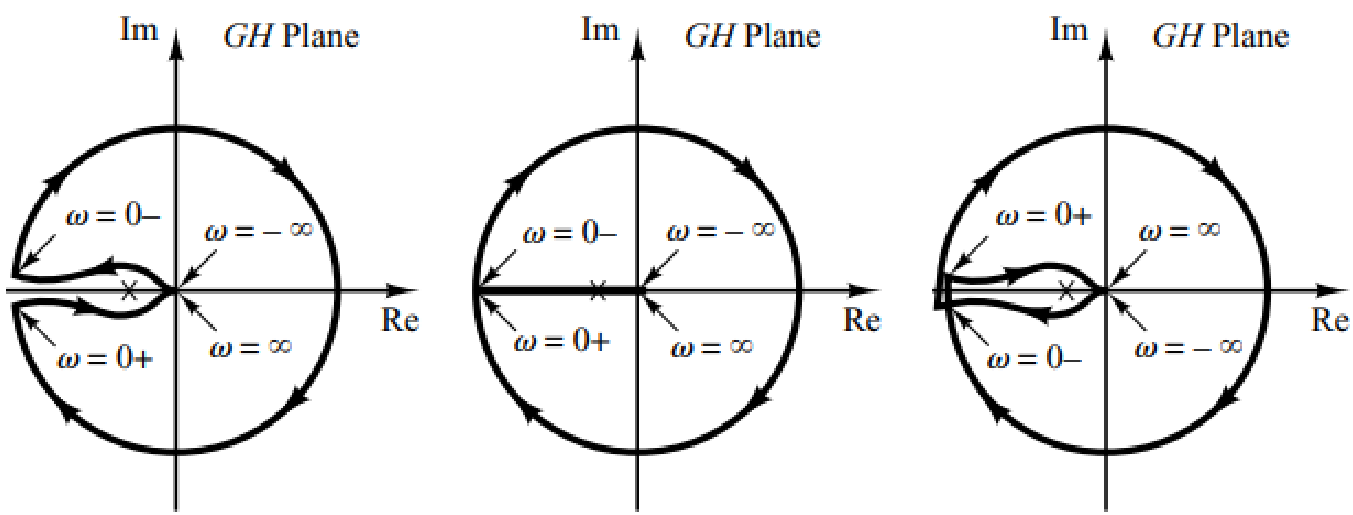
دیاگرام بود و نایکوئیست

- ❑ دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - ❖ مثال

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

✓ N = 0 or 2 , P = 0 ➡ Z = 0 or 2

✓ پس پایداری سیستم به نسبت T ها بستگی دارد.



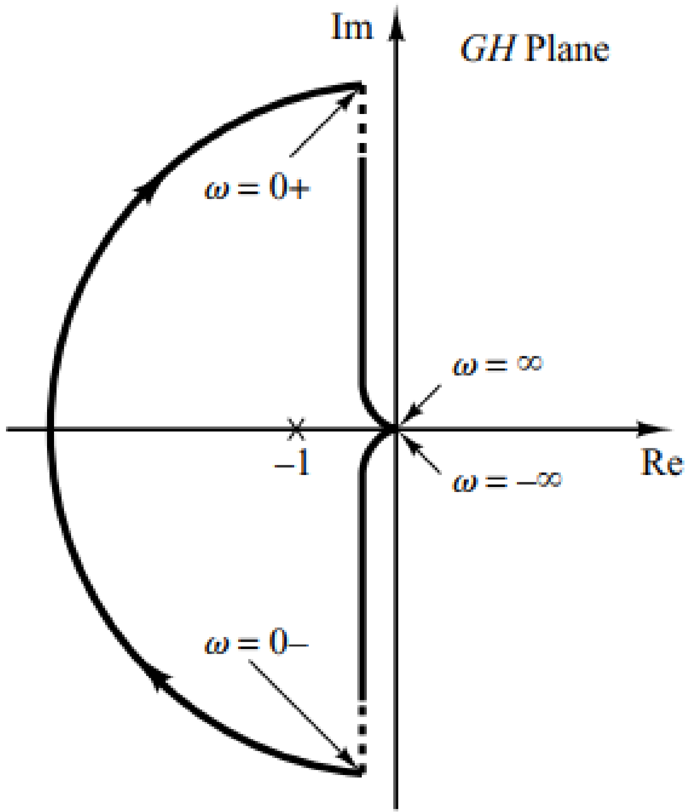
$T_1 < T_2$
(Stable)

$T_1 = T_2$
$G(j\omega)\,H(j\omega)$ locus passes through the $-1 + j0$ point

$T_1 > T_2$
(Unstable)

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال

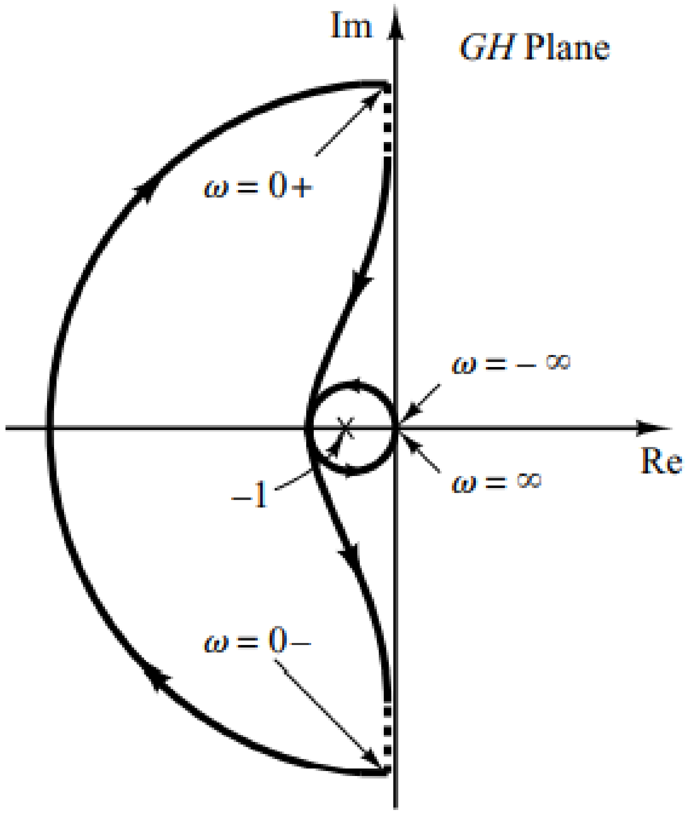


$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

- $N = 1\,,\ P = 1 \;\Rightarrow\; Z = 2$
- پس سیستم ناپایدار است.

دیاگرام بود و نایکوئیست

- دیاگرام نایکوئیست (Nyquist)
  - مثال



$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \qquad (K > 1)$$

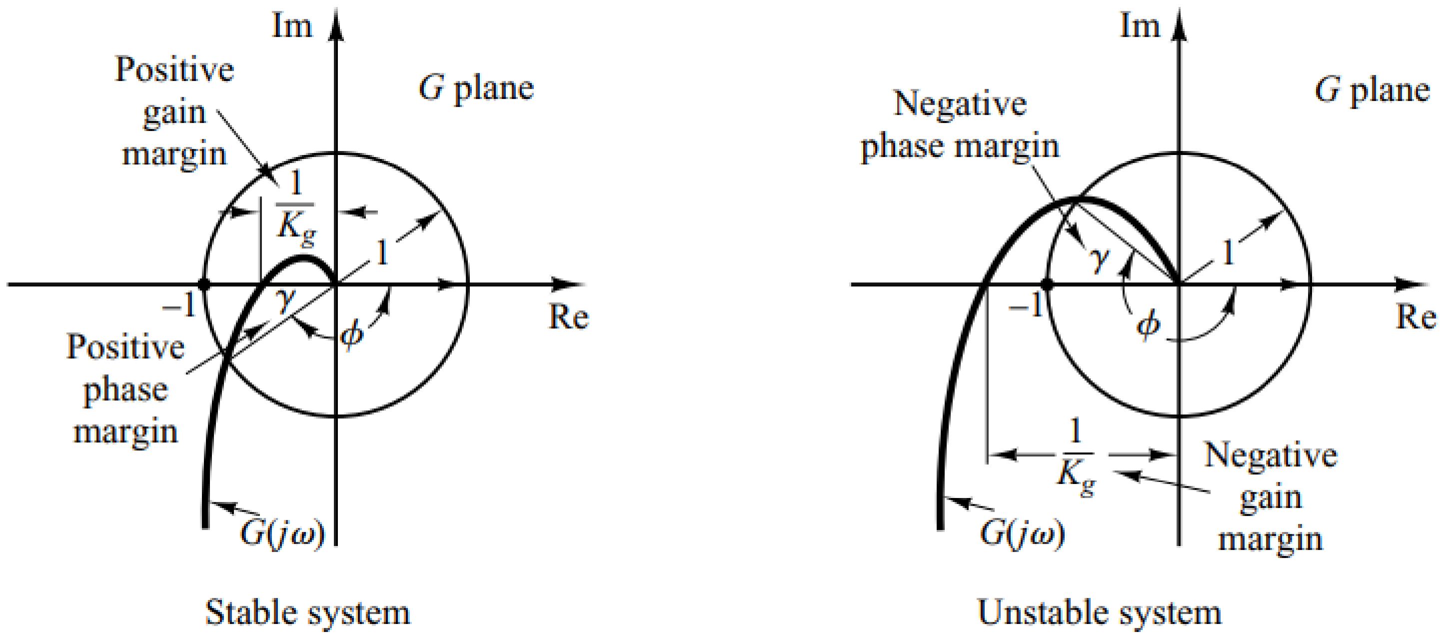
✓ N = -1 , P = 1 ➡ Z = 0

✓ پس سیستم پایدار است.

- با وجود قطب مدار باز در RHP ، به دلیل دور زدن پادساعتگرد دیاگرام، سیستم پایدار است.

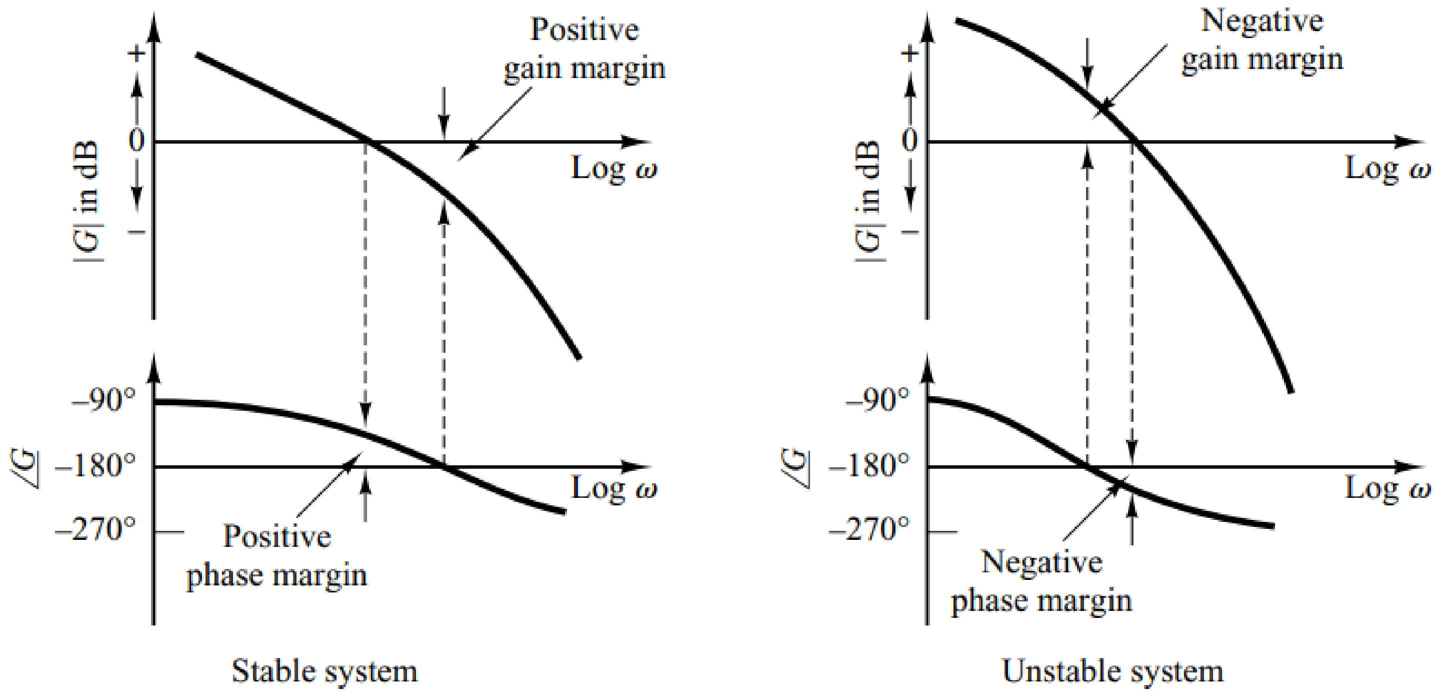
دیاگرام بود و نایکوئیست

- مفهوم حدفاز (Gain Margin) و حد بهره (Phase Margin) روی دیاگرام نایکوئیست
  - ✓ حدفاز و حد بهره نشان دهنده فاصله وضعیت سیستم تا وضعیت ناپایدار هستند.
    - در صورت افزایش بهره سیستم تا حد بهره و یا افزایش فاز سیستم تا حد فاز سیستم همچنان پایدار است، ولی در صورت افزایش بیشتر سیستم ناپایدار خواهد شد.
  - ✓ می توان برای ایجاد رفتار مناسب برای سیستم، برای حدفاز و حد بهره مقادیر مطلوبی تعیین نمود.



دیاگرام بود و نایکوئیست

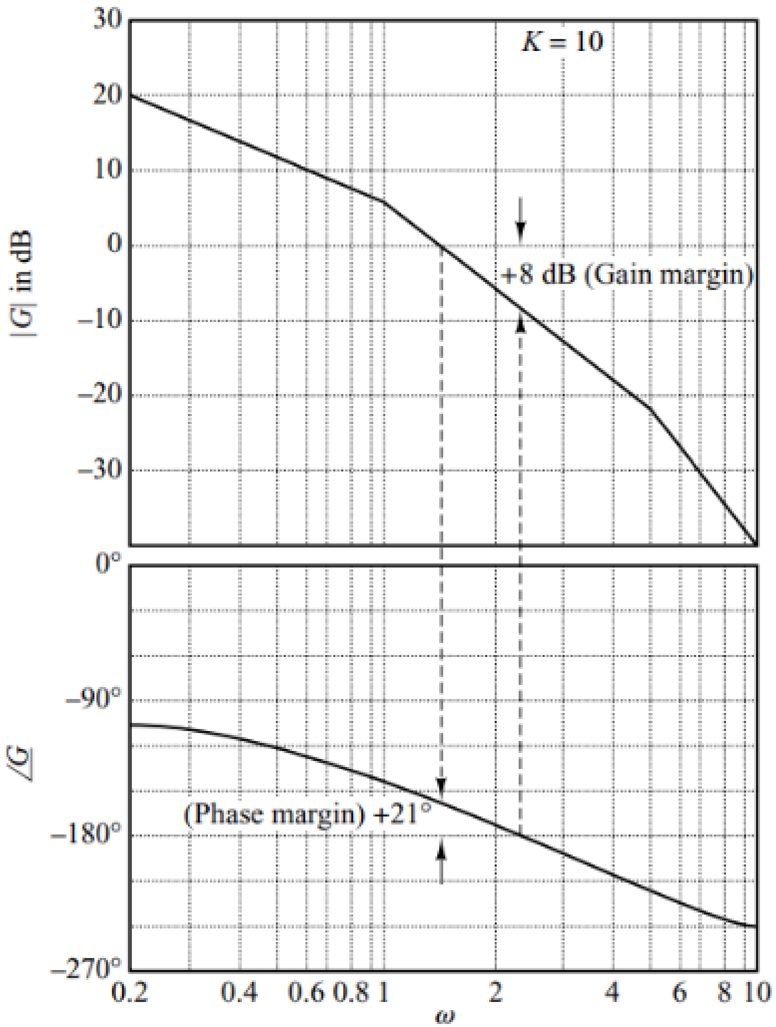
- مفهوم حدفاز (Gain Margin) و حد بهره (Phase Margin) روی دیاگرام بود

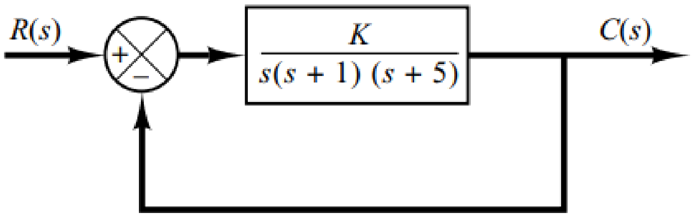


✓ برای پایداری سیستم باید حد فاز و حد بهره در دیاگرام بود مثبت باشند.

دیاگرام بود و نایکوئیست

- تعیین حدفاز و حد بهره
  - مثال

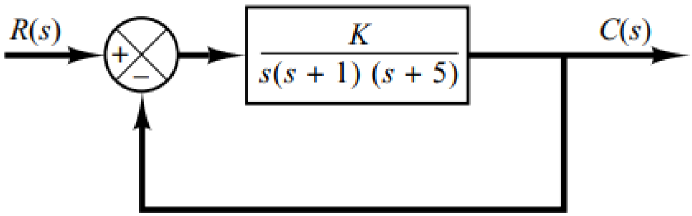


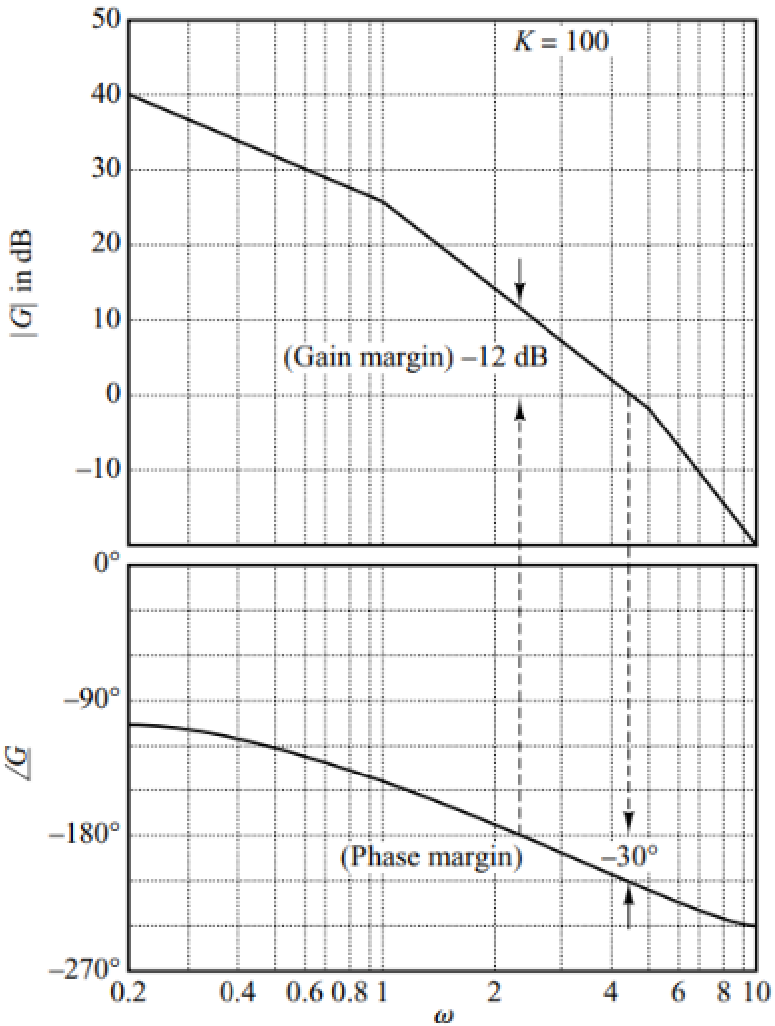


✓ K = 10 ⬅ پایدار

دیاگرام بود و نایکوئیست

- تعیین حدفاز و حد بهره
  - مثال

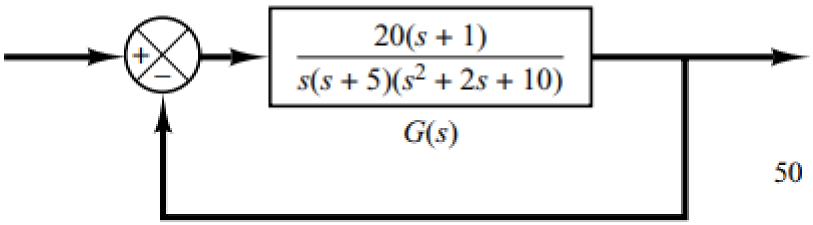




✓ K = 100 ⟵ ناپایدار

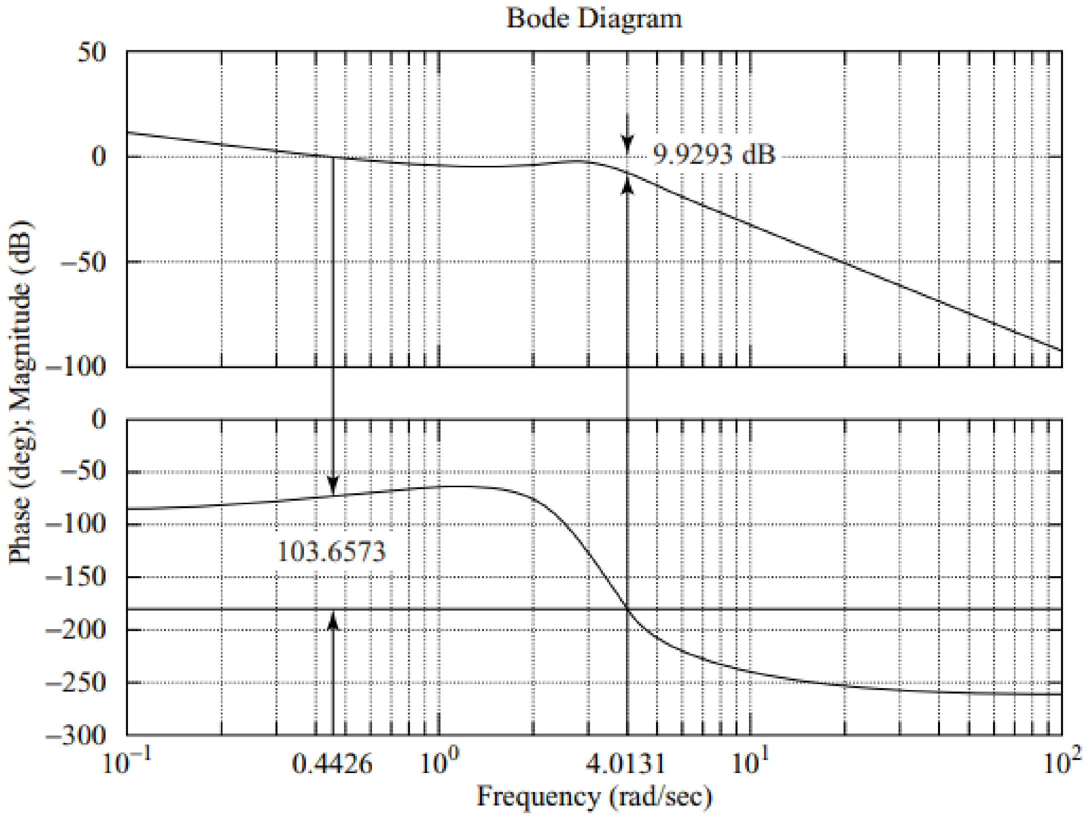
دیاگرام بود و نایکوئیست

- تعیین حدفاز و حد بهره
  - مثال



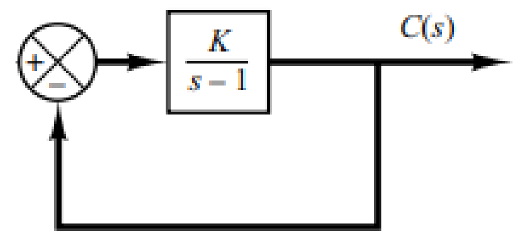
MATLAB Program 7–11

```
num = [20  20];
den = conv([1  5  0],[1  2  10]);
sys = tf(num,den);
w = logspace(-1,2,100);
bode(sys,w)
[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);
GmdB = 20*log10(Gm);
[GmdB  pm  wcp  wcg]

ans =

   9.9293  103.6573  4.0131  0.4426
```



دیاگرام بود و نایکوئیست

- تعیین حدفاز و حد بهره
  - مثال



$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$