دانشکده مهندسی مکانیک

درس کنترل اتوماتیک

AUTOMATIC CONTROL

روش مکان هندسی ریشه ها

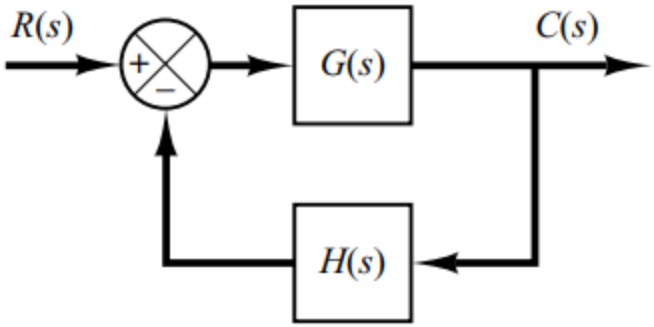
❑ فهرست مطالب

- مقدمه ای بر سیستم های کنترل
- مدلسازی و نمایش سیستم های دینامیکی و کنترلی
- پایداری سیستم های کنترلی
- **روش مکان هندسی ریشه ها** ←
- تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار سیستم های کنترلی
- روش های تحلیل پاسخ فرکانسی
- طراحی سیستم های کنترل

مکان هندسی ریشه ها

تعریف مکان هندسی ریشه ها

- ✓ محل ریشه های تابع تبدیل (قطب ها سیستم) بر روی رفتار سیستم بسیار تاثیرگذار است.
- ✓ تعریف قطب سیستم مدار بسته: صفر شدن مخرج تابع تبدیل مدار بسته (معادله مشخصه)
- ✓ مکان هندسی ریشه ها، نحوه جا به جایی قطب های سیستم (در صفحه مختلط) با تغییرات ضریب کنترلی (K) است.
- ✓ مکان هندسی از قطب ها شروع می شود (K به سمت صفر) و به سمت صفرها می رود. (K به سمت بینهایت)



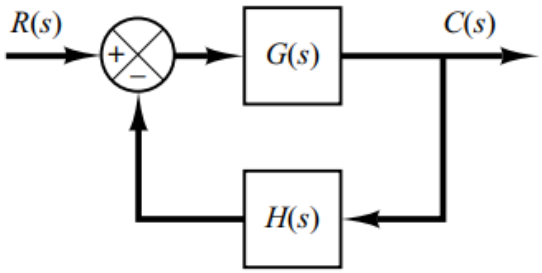
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\rightarrow 1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\rightarrow 1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} = 0$$

مکان هندسی ریشه ها

- تعریف مکان هندسی ریشه ها
  - ✓ معادله مشخصه



$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

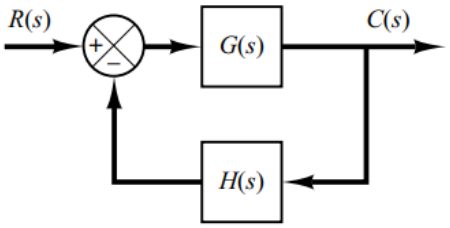
  - ✓ شرط قرار داشتن یک نقطه روی مکان هندسی
    - شرط اندازه

$$|G(s)H(s)| = 1$$

    - شرط زاویه

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180°(2k + 1) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

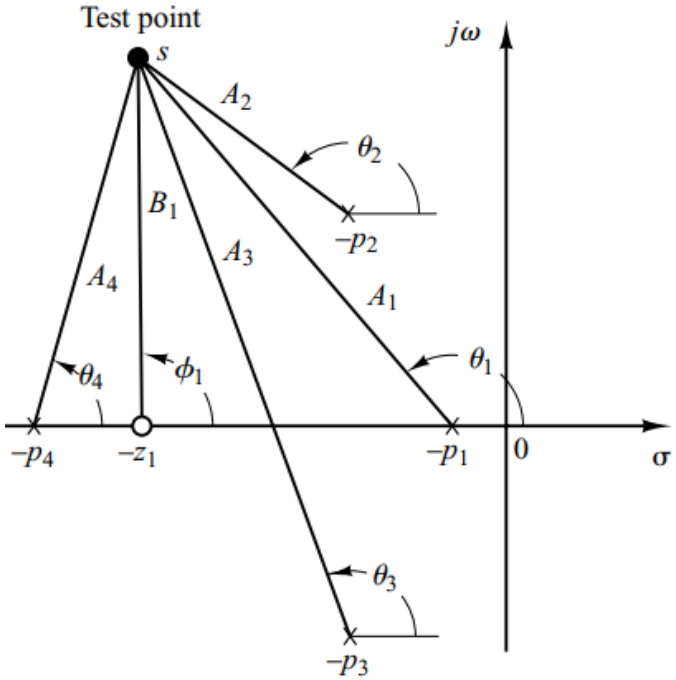
مکان هندسی ریشه ها



تعریف مکان هندسی ریشه ها

- نحوه بررسی ترسیمی قرار داشتن یک نقطه روی مکان هندسی
  - ✓ بررسی فاصله و زاویه نسبت به صفر و قطب های سیستم مدار باز ($G(s)H(s)$)

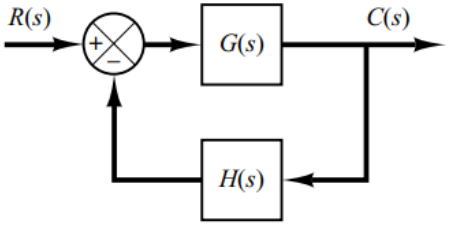
$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$



- ✓ شرط اندازه ها:

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

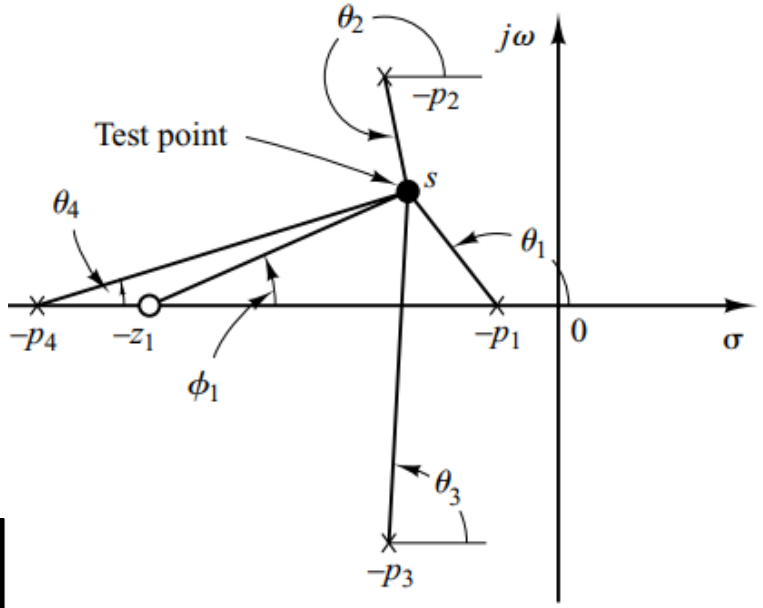
مکان هندسی ریشه ها



تعریف مکان هندسی ریشه ها

- نحوه بررسی ترسیمی قرار داشتن یک نقطه روی مکان هندسی
  - ✓ بررسی فاصله و زاویه نسبت به صفر و قطب های سیستم مدار باز ($G(s)H(s)$)

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

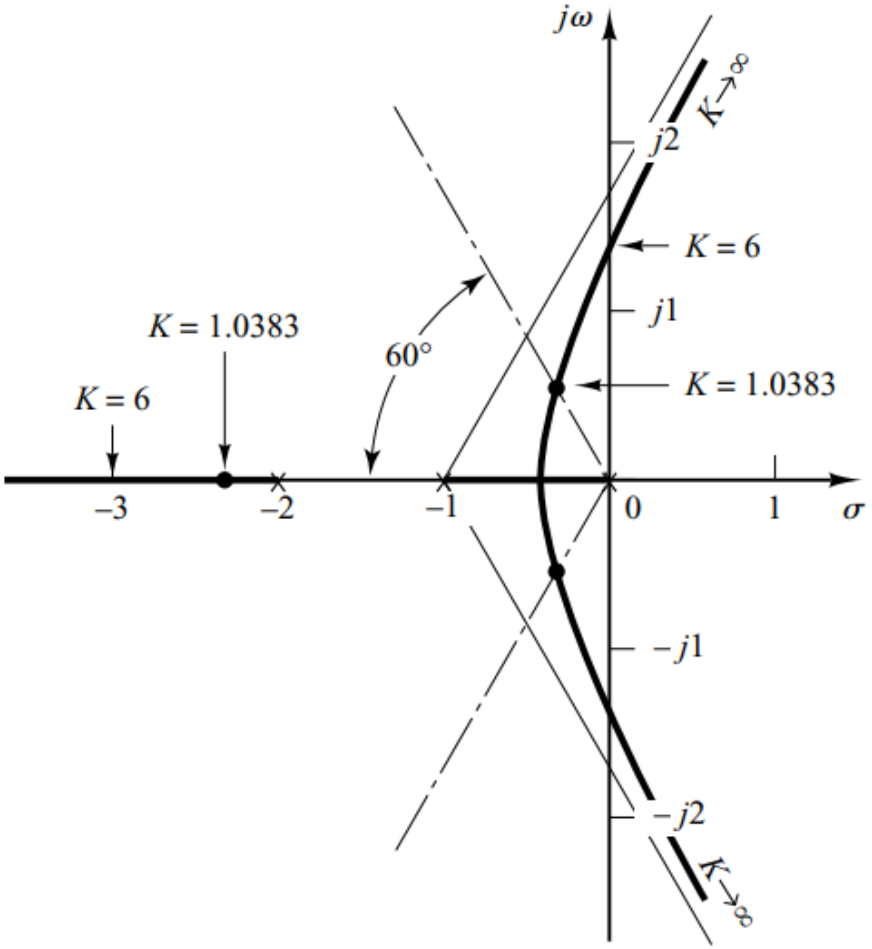


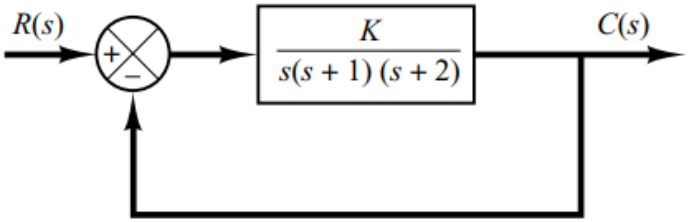
✓ شرط زاویه ها:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

مکان هندسی ریشه ها

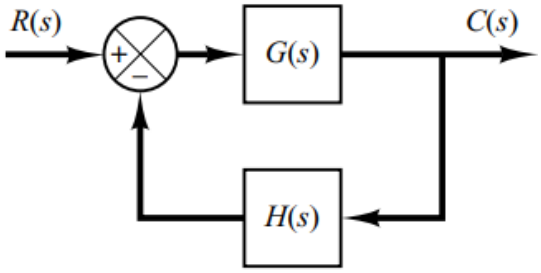
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال





مکان هندسی ریشه ها

- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مشخص کردن تابع تبدیل مدار باز



$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\rightarrow \quad 1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} = 0$$

  - ✓ مشخص کردن صفر و قطب های تابع تبدیل مدار باز در صفحه مختلط
  - ✓ تعیین مکان هندسی روی محور حقیقی
    - شمارش تعداد صفر و قطب سمت راست مکان مورد نظر
      - تعداد فرد: روی مکان هندسی
      - تعداد زوج: خارج از مکان هندسی

مکان هندسی ریشه ها

- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ تعیین مجانب های مکان هندسی

$$\text{Angles of asymptotes} = \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{n-m}$$

$$s = -\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n-m}$$

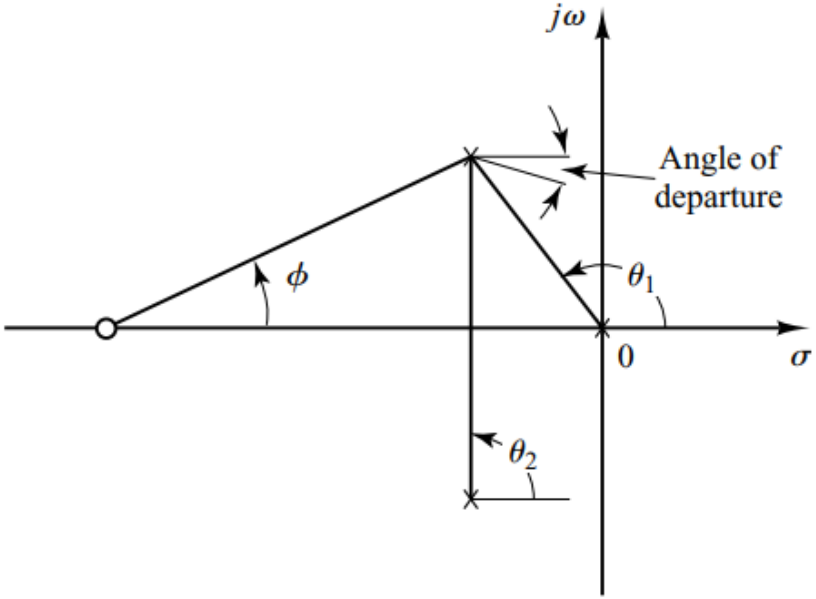
  - ✓ تعیین نقاط Break-in و Breakaway

$$B(s) + KA(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0$$

  - ✓ تعیین زاویه خروج از صفرها و قطب ها
  - ✓ مشخص کردن نقاط برخورد با محور موهومی
    - با استفاده از: مرز پایداری با روش راث – حل معادله ریشه صرفا موهومی

مکان هندسی ریشه ها

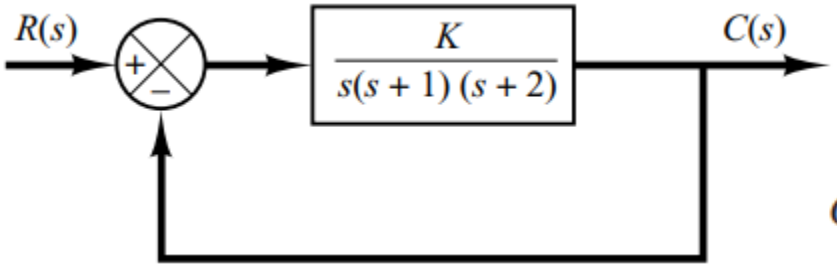
- روش رسم مکان هندسی
  - تعیین زاویه خروج از صفر یا قطب
    - ✓ محاسبه زاویه سایر صفرها و قطب ها در نقطه مطلوب
    - ✓ اعمال شرط زاویه فاز
    - ✓ تعیین زاویه خروج



$$\text{Angle of departure} = 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2) + \phi$$

مکان هندسی ریشه ها

- رسم مکان هندسی ریشه ها
  - مثال



✓ مشخص کردن تابع تبدیل مدار باز

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \qquad H(s) = 1$$

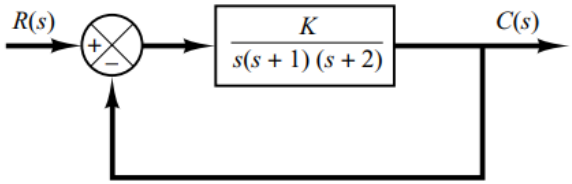
✓ شرط اندازه و زاویه

$$\angle G(s) = \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$
$$= -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2$$
$$= \pm 180°(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1$$

✓ مشخص کردن صفر و قطب های تابع تبدیل مدار باز در صفحه مختلط

مکان هندسی ریشه ها



- رسم مکان هندسی ریشه ها
  - مثال

✓ تعیین مکان هندسی روی محور حقیقی

- اعداد مثبت

$$\angle s = \angle s+1 = \angle s+2 = 0°$$

- بین ۰ و ۱-

$$\angle s = 180°, \quad \angle s+1 = \angle s+2 = 0°$$

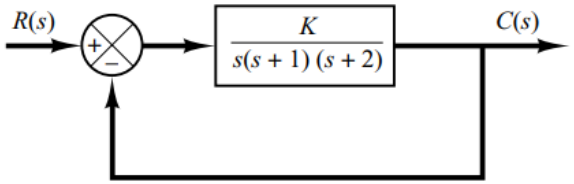
$$\rightarrow \quad -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 = -180°$$

- کوچک تر از ۱-

$$\angle s = \angle s+1 = 180°, \quad \angle s+2 = 0°$$

$$\rightarrow \quad -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 = -360°$$

مکان هندسی ریشه ها



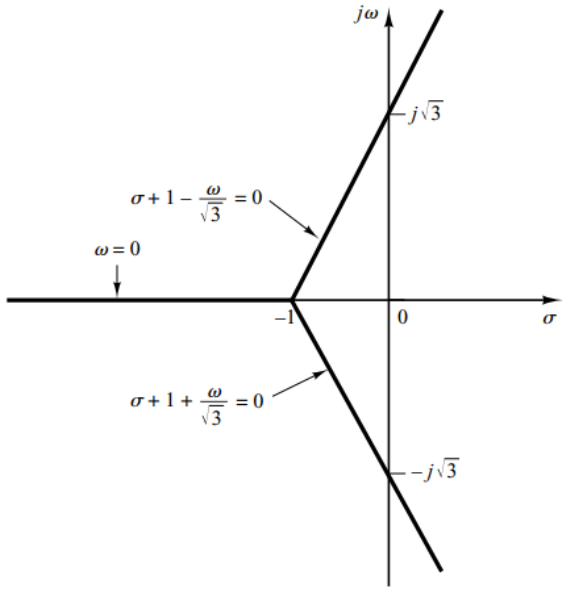
- رسم مکان هندسی ریشه ها
  - مثال
    - ✓ تعیین مجانب های مکان هندسی
    - استفاده از روابط داده شده ...
    - محاسبه مقادیر حدی برای S

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3}$$

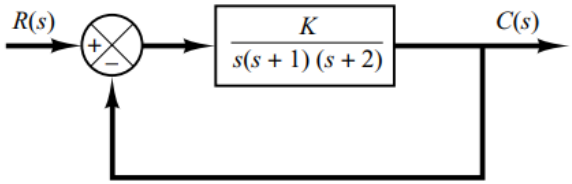
$$-3\angle s = \pm 180°(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Angles of asymptotes} = \frac{\pm 180°(2k+1)}{3}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \cdots} \quad \Rightarrow \quad G(s) \doteq \frac{K}{(s+1)^3}$$



مکان هندسی ریشه ها



- رسم مکان هندسی ریشه ها
  - مثال
    - ✓ تعیین نقاط Break-in و Breakaway

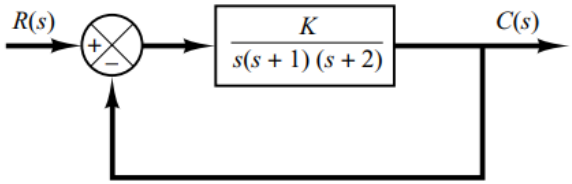
$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \rightarrow K = -\frac{B(s)}{A(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds} = 0$$

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0 \rightarrow K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

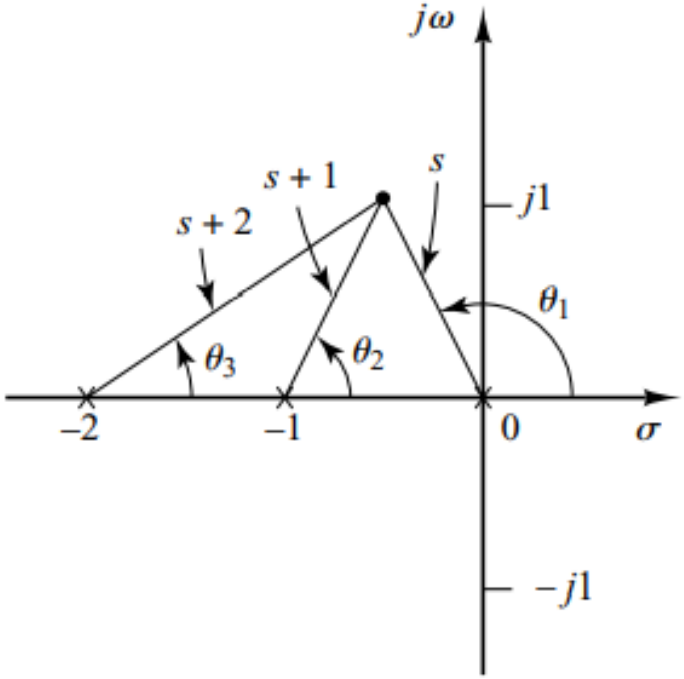
$$\rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0 \rightarrow s = -0.4226, \quad s = -1.5774$$

$$\rightarrow \begin{aligned} K &= 0.3849, \quad \text{for } s = -0.4226 \\ K &= -0.3849, \quad \text{for } s = -1.5774 \end{aligned}$$

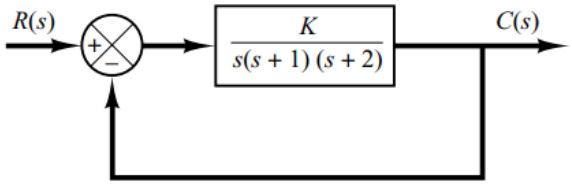
مکان هندسی ریشه ها



- رسم مکان هندسی ریشه ها
  - مثال
    - ✓ تعیین زاویه خروج از صفرها و قطب ها



مکان هندسی ریشه ها



- رسم مکان هندسی ریشه ها
  - ✓ مشخص کردن نقاط برخورد با محور موهومی
    - روش راث

$$\rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

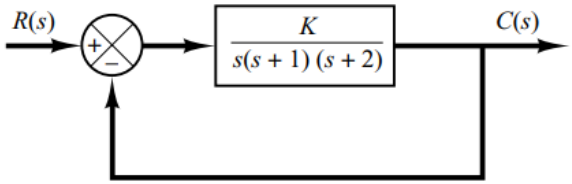
s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6 - K}{3}$	
s^0	K	

$$\rightarrow \quad K = 6$$

$$\rightarrow \quad 3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

$$\rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2}$$

مکان هندسی ریشه ها



- رسم مکان هندسی ریشه ها
  - ✓ مشخص کردن نقاط برخورد با محور موهومی
  - روش حل معادله ریشه صرفا موهومی

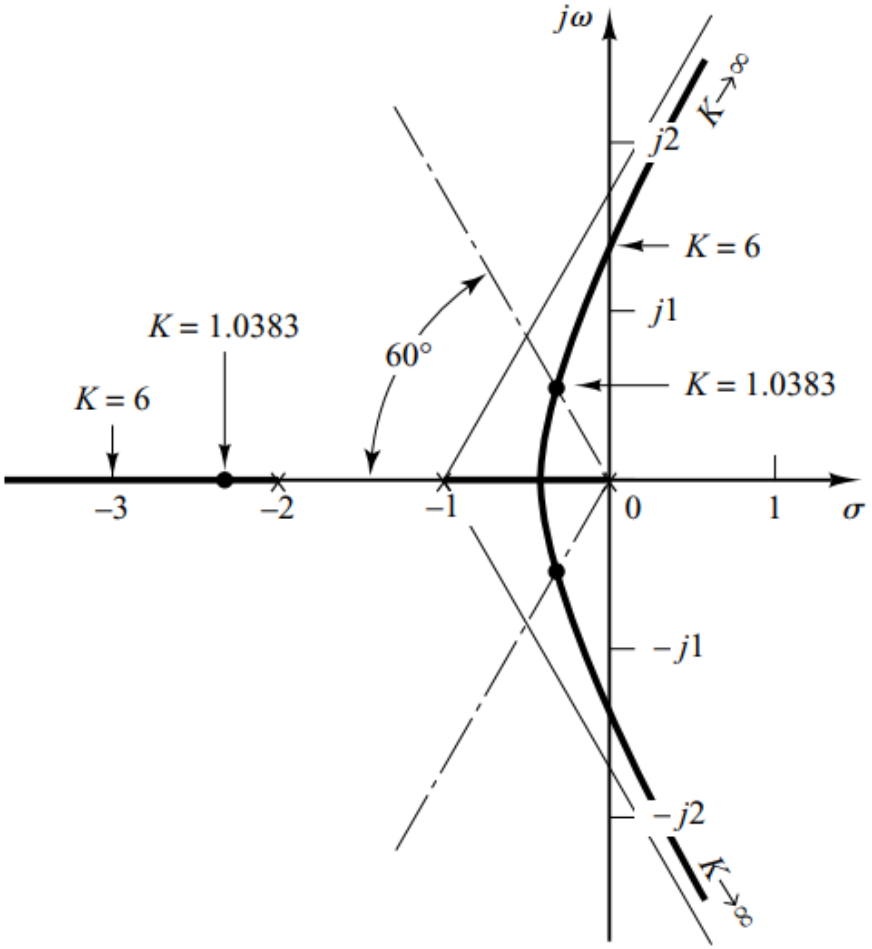
$$s = j\omega \rightarrow (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

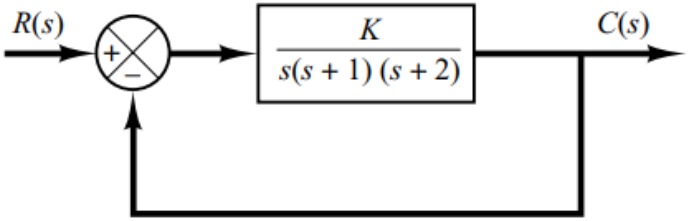
$$\rightarrow (K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

$$\rightarrow \omega = \pm\sqrt{2}, \quad K = 6 \quad \text{or} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

مکان هندسی ریشه ها

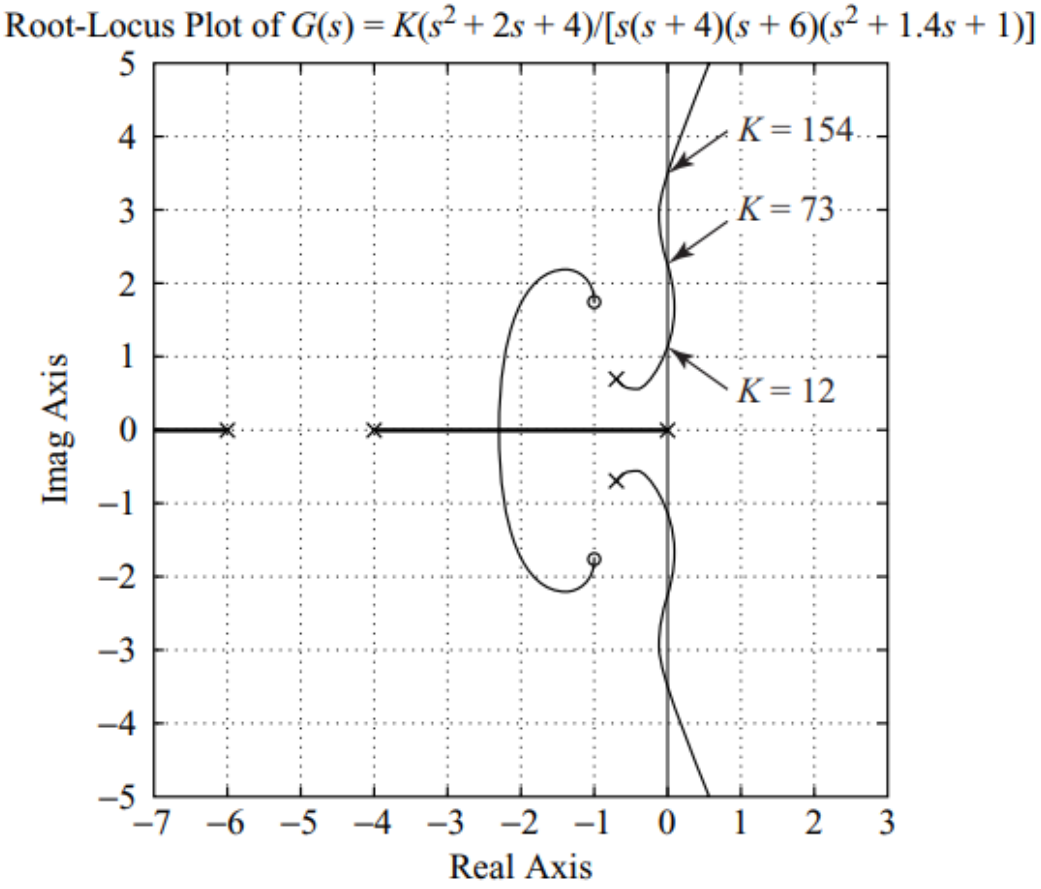
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال





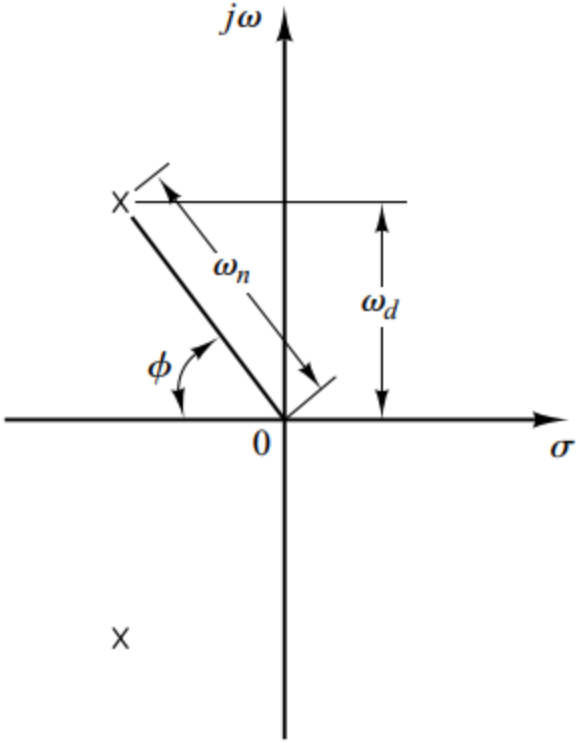
مکان هندسی ریشه ها

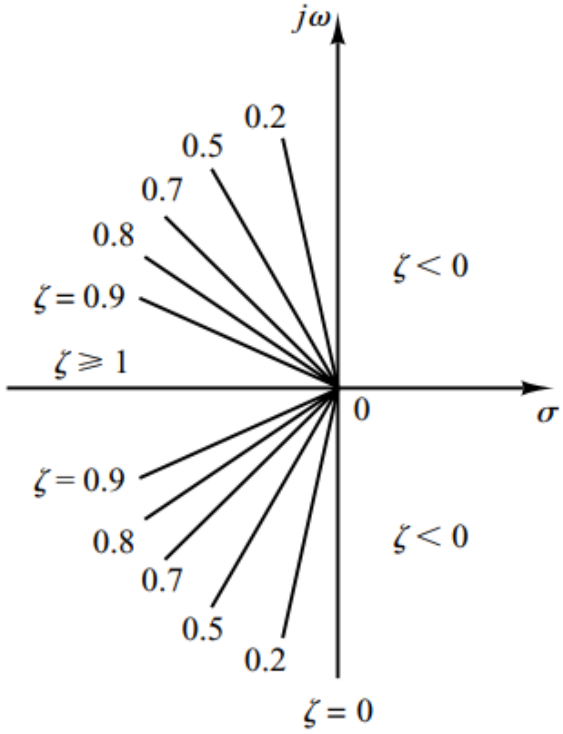
- رسم مکان هندسی با استفاده از نرم افزار MatLab



مکان هندسی ریشه ها

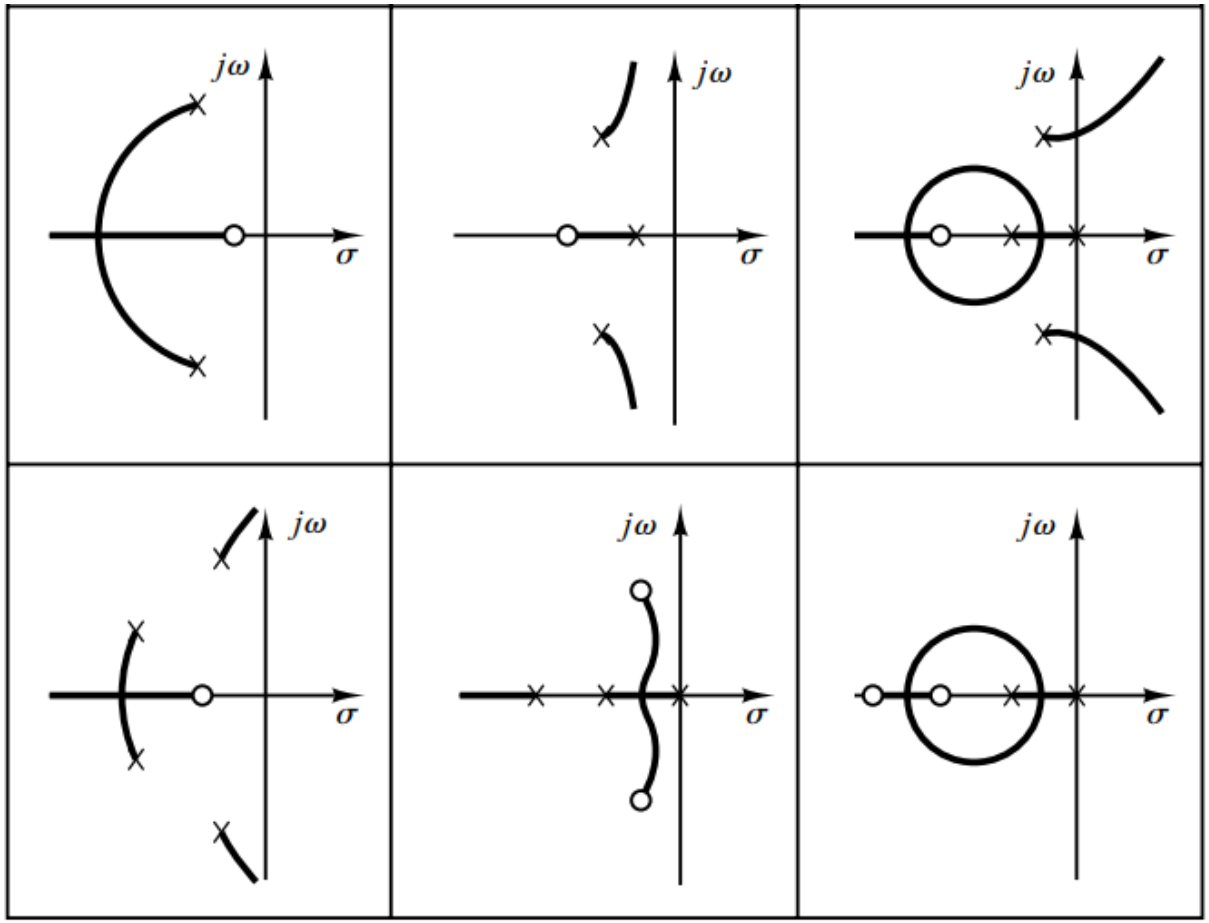
- تعیین مشخصات پاسخ از روی نمودار
  - برای موقعیت قطب های قالب:
    - ✓ فرکانس طبیعی
    - ✓ فرکانس طبیعی میرا
    - ✓ ضریب میرایی





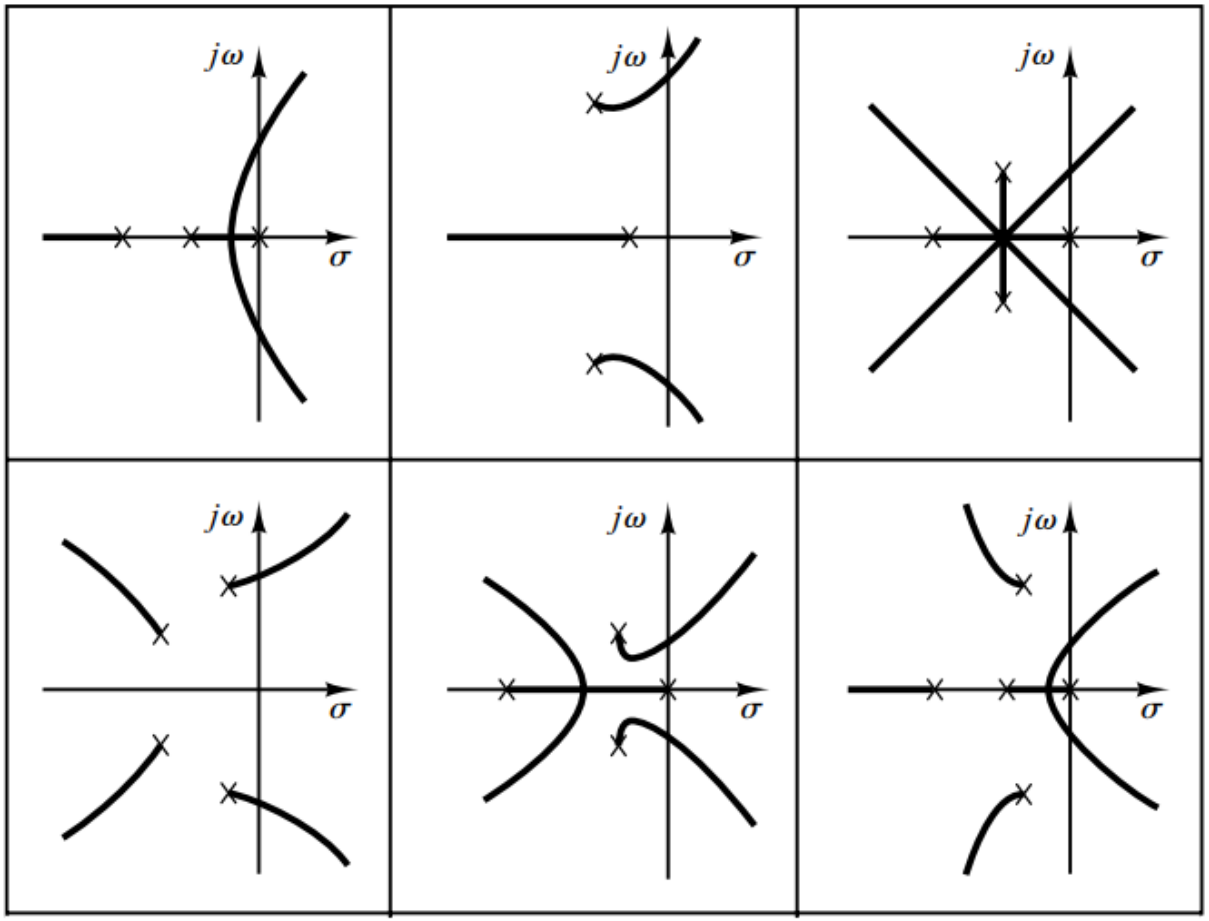
مکان هندسی ریشه ها

- نمونه هایی از مکان هندسی ریشه های سیستم های مختلف



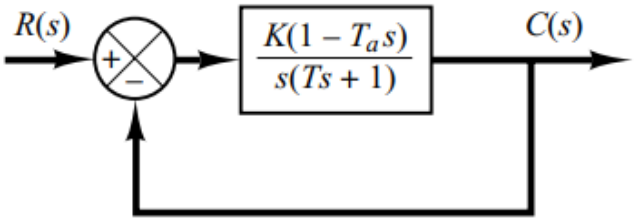
مکان هندسی ریشه ها

- نمونه هایی از مکان هندسی ریشه های سیستم های مختلف

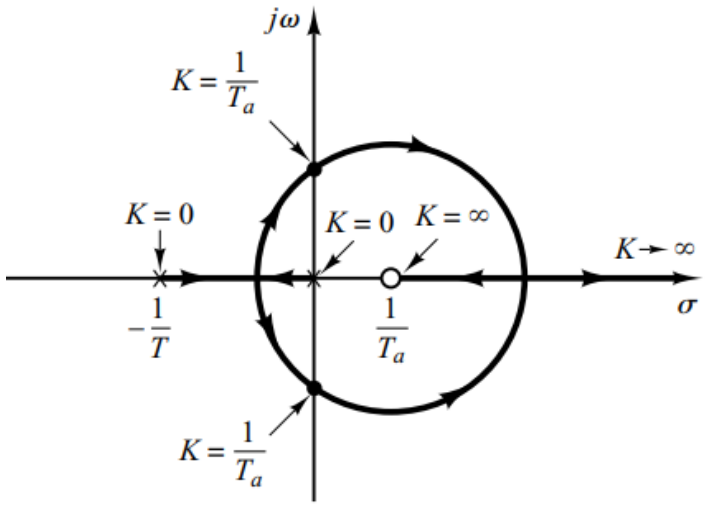


مکان هندسی ریشه ها

- **سیستم های غیر مینیموم فاز** (Nonminimum Phase Systems - NMP)
  - ✓ **تعریف سیستم غیر مینیموم فاز**
    - **وجود صفر یا قطب در نیم صفحه سمت راست محور موهومی (S با ضریب منفی)**



$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \qquad (T_a > 0)$$



✓ **تغییر شرط زاویه در مکان هندسی**

$$\angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} = 0°$$

مکان هندسی ریشه ها

- **سیستم های با فیدبک مثبت** (Positive Feedback Systems)
  - **تابع تبدیل مدار بسته**

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

  - **شرط رسم مکان هندسی**

$$1 - G(s)H(s) = 0 \quad \rightarrow \quad G(s)H(s) = 1$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} \angle G(s)H(s) = 0^\circ \pm k360^\circ \\ |G(s)H(s)| = 1 \end{cases}$$

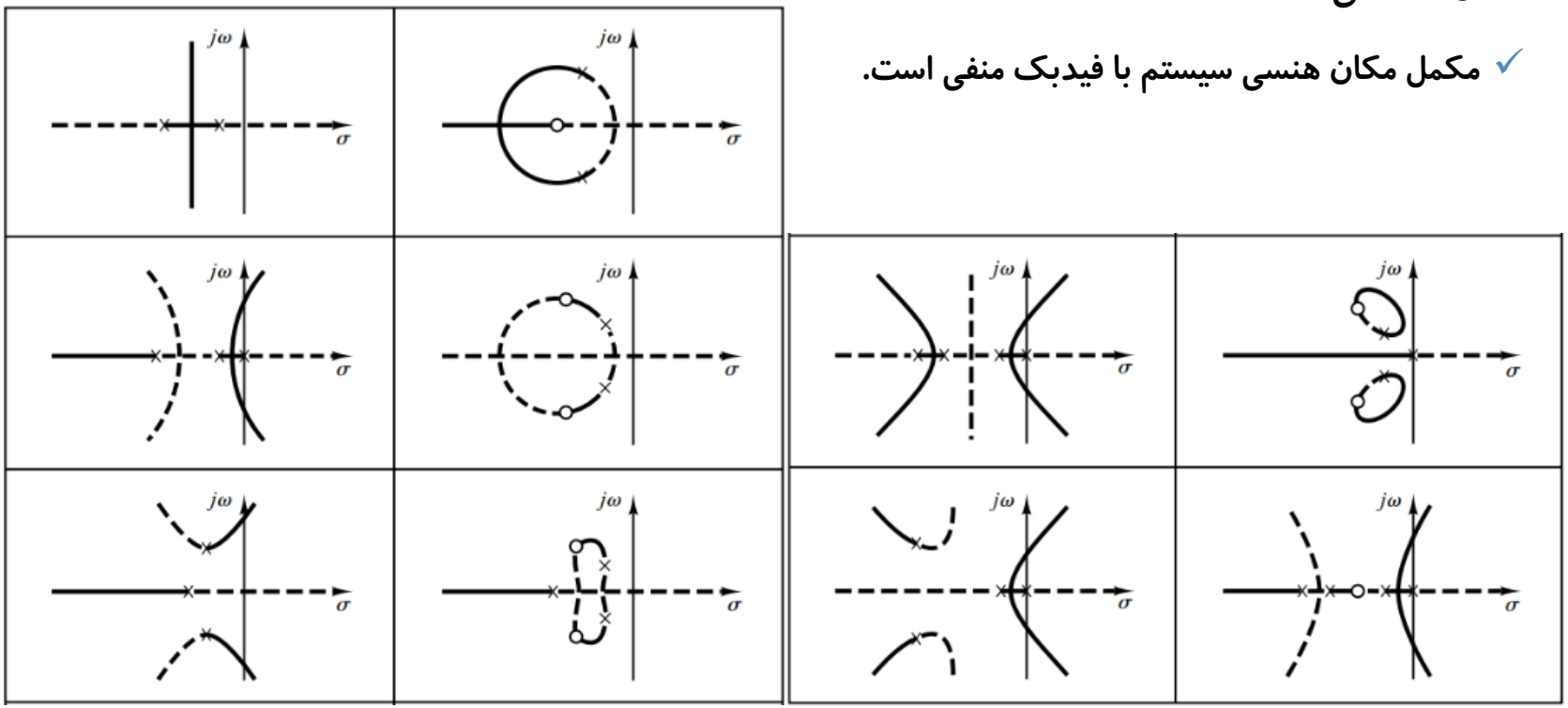
✓ **شرط اندازه تغییری نمیکند، ولی شرط زاویه عوض می شود.**

مکان هندسی ریشه ها

❑ سیستم های با فیدبک مثبت (Positive Feedback Systems)

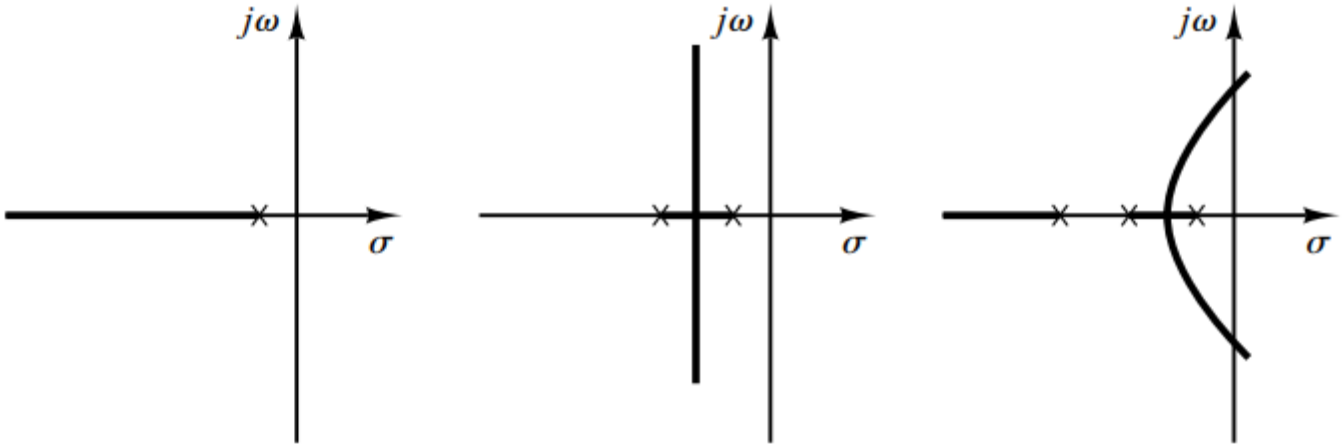
❖ مکان هندسی:

✓ مکمل مکان هنسی سیستم با فیدبک منفی است.



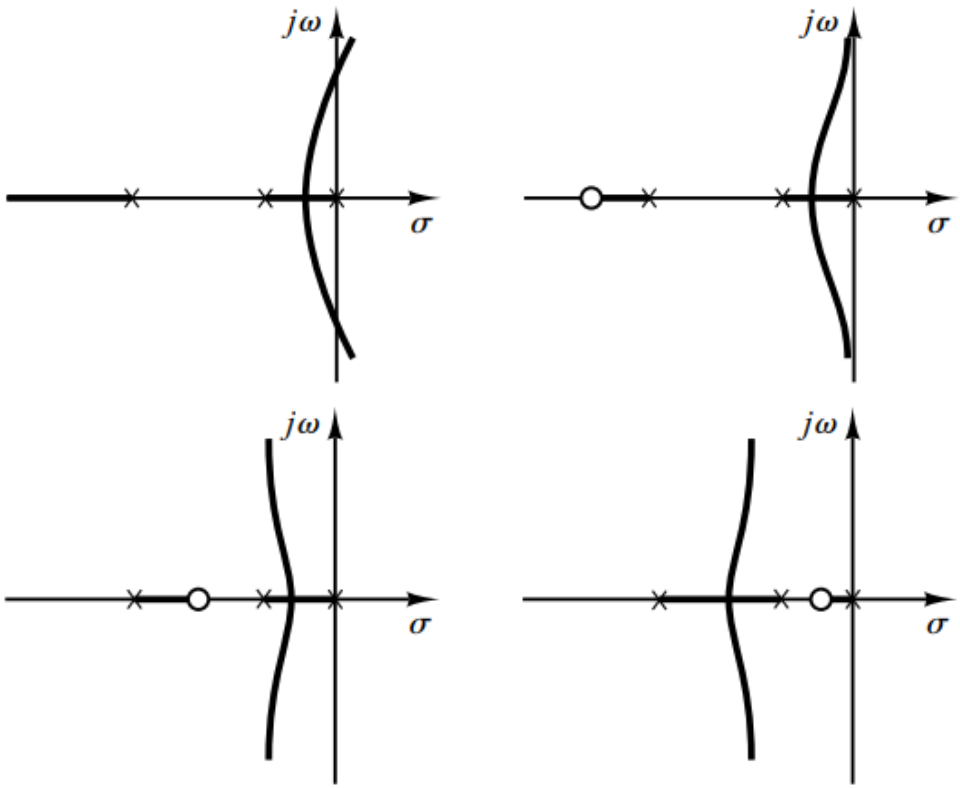
مکان هندسی ریشه ها

- تاثیر اضافه کردن قطب به سیستم مدار باز
  - افزودن عامل انتگرالی
  - جذب مکان هندسی
  - کاهش پایداری نسبی سیستم
  - کند کردن سیستم



مکان هندسی ریشه ها

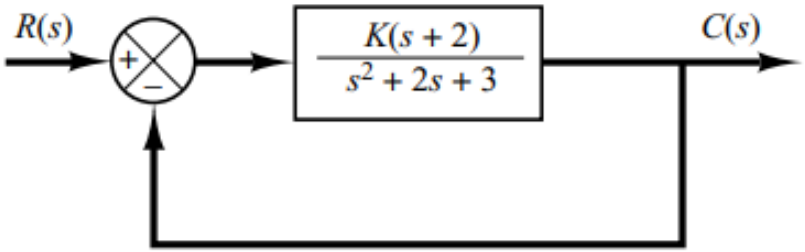
- تاثیر اضافه کردن صفر به سیستم مدار باز



- افزودن عامل مشتقی
- دفع مکان هندسی
- افزایش پایداری نسبی سیستم
- تند کردن سیستم

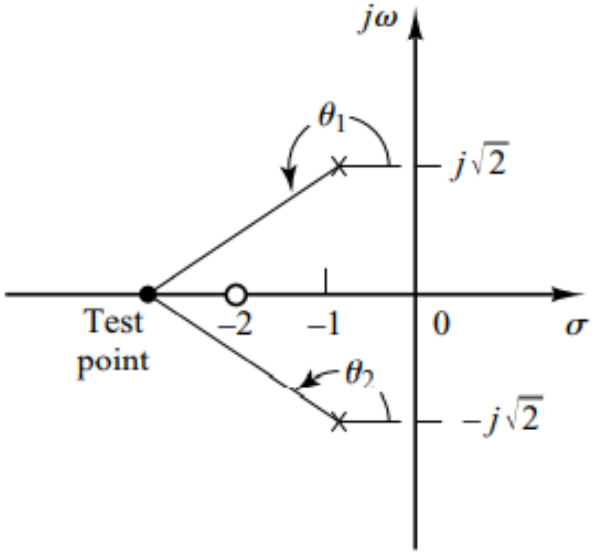
مکان هندسی ریشه ها

- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال
    - تابع تبدیل مدار باز



$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}, \qquad H(s) = 1$$

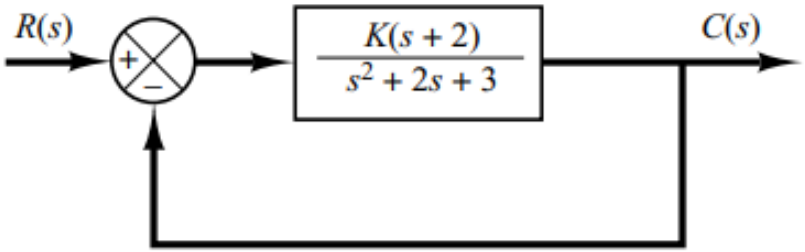
- تعیین صفر و قطب ها



$$s = -1 + j\sqrt{2}, \qquad s = -1 - j\sqrt{2}$$

مکان هندسی ریشه ها

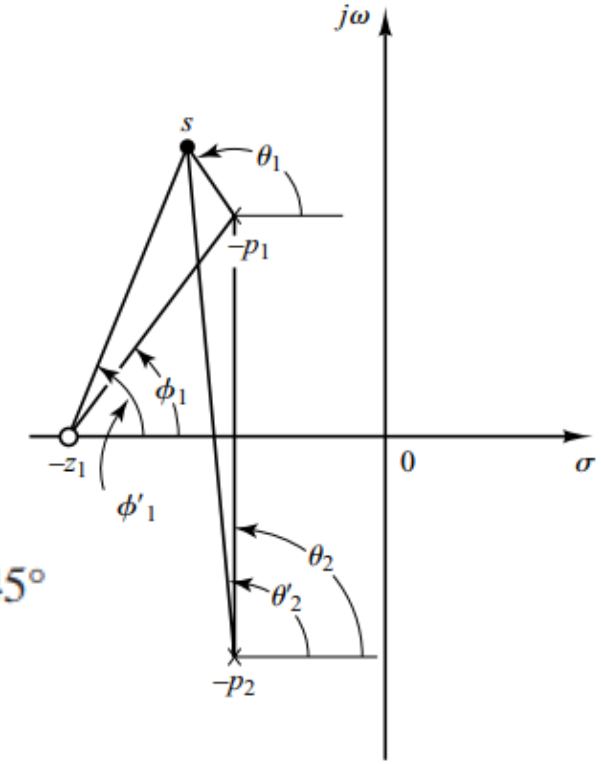
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال
    - تابع زاویه خروج



$$\phi_1' - (\theta_1 + \theta_2') = \pm 180°(2k + 1)$$

$$\rightarrow \quad \theta_1 = 180° - \theta_2' + \phi_1' = 180° - \theta_2 + \phi_1$$

$$\rightarrow \quad \theta_1 = 180° - \theta_2 + \phi_1 = 180° - 90° + 55° = 145°$$



مکان هندسی ریشه ها

- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال
    - تعیین نقاط Break-in و Breakaway

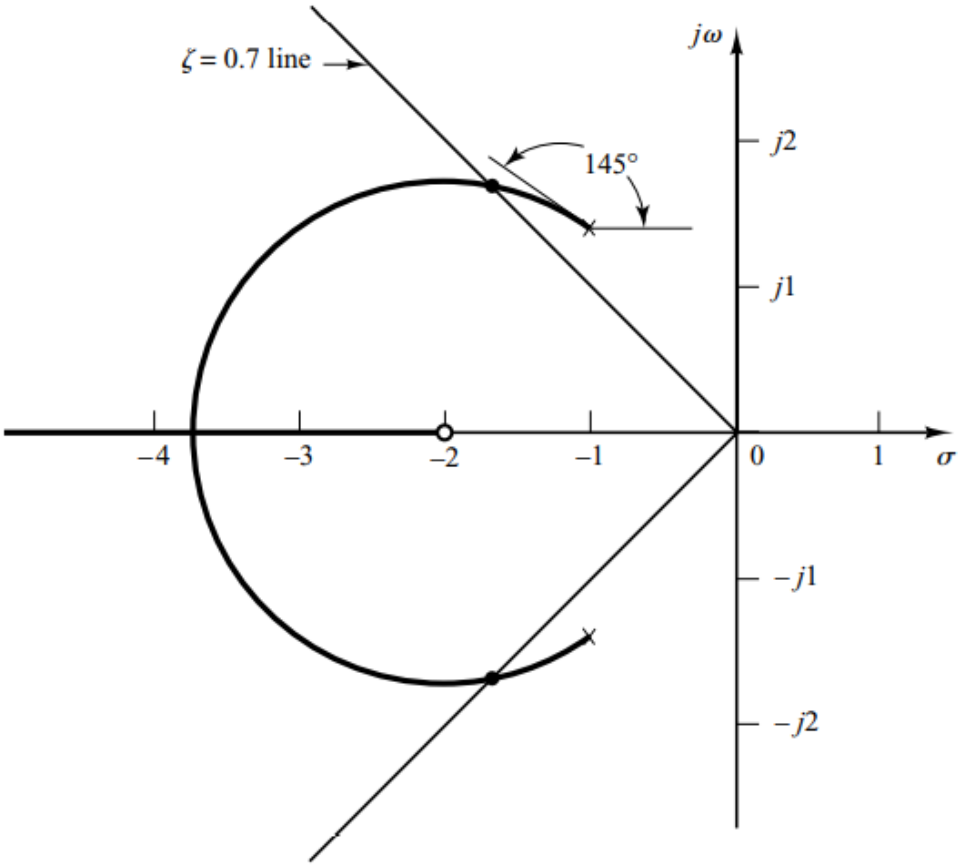
$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2} \quad \rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -\frac{(2s + 2)(s + 2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s + 2)^2} = 0$$

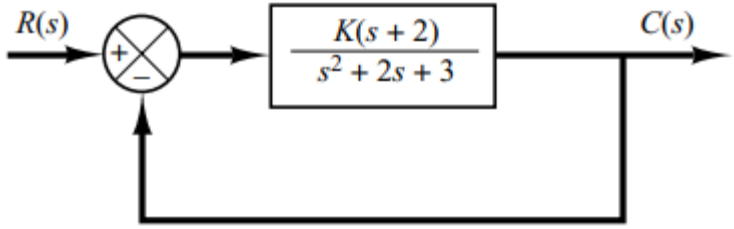
$$\rightarrow \quad s^2 + 4s + 1 = 0$$

$$\rightarrow \quad s = -3.7320 \quad \text{or} \quad s = -0.2680$$

مکان هندسی ریشه ها

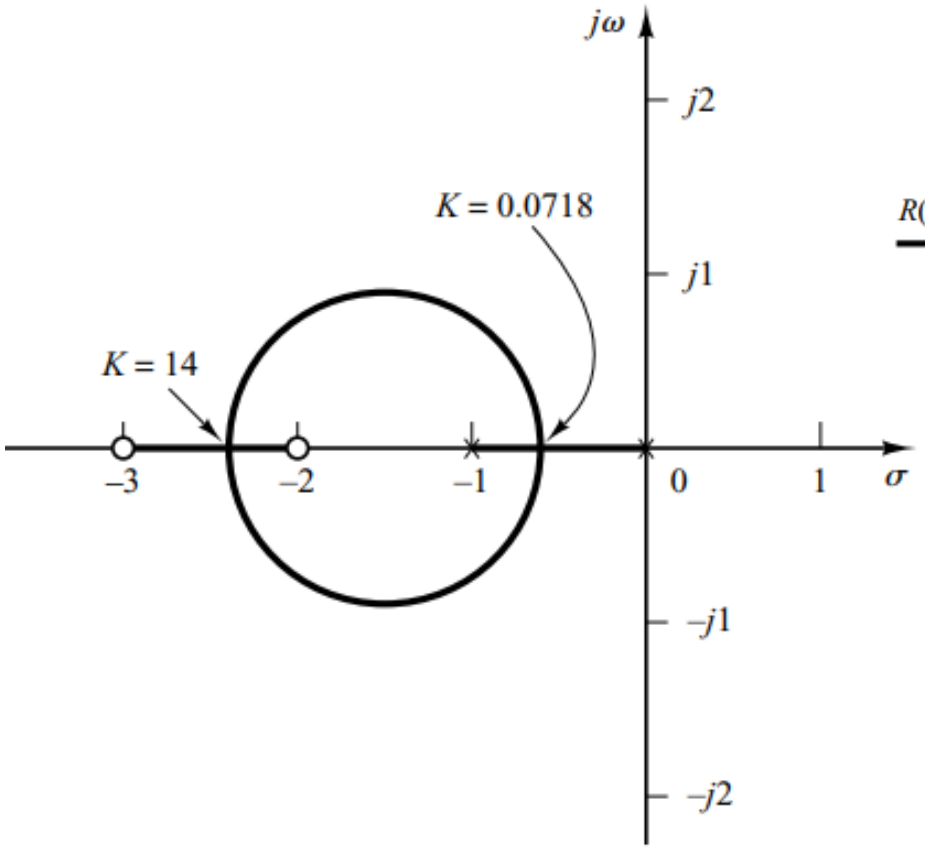
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال

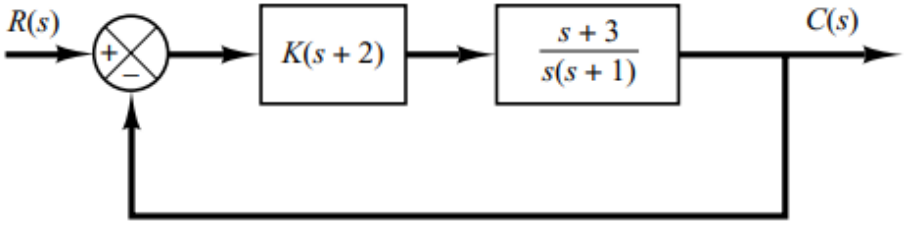




مکان هندسی ریشه ها

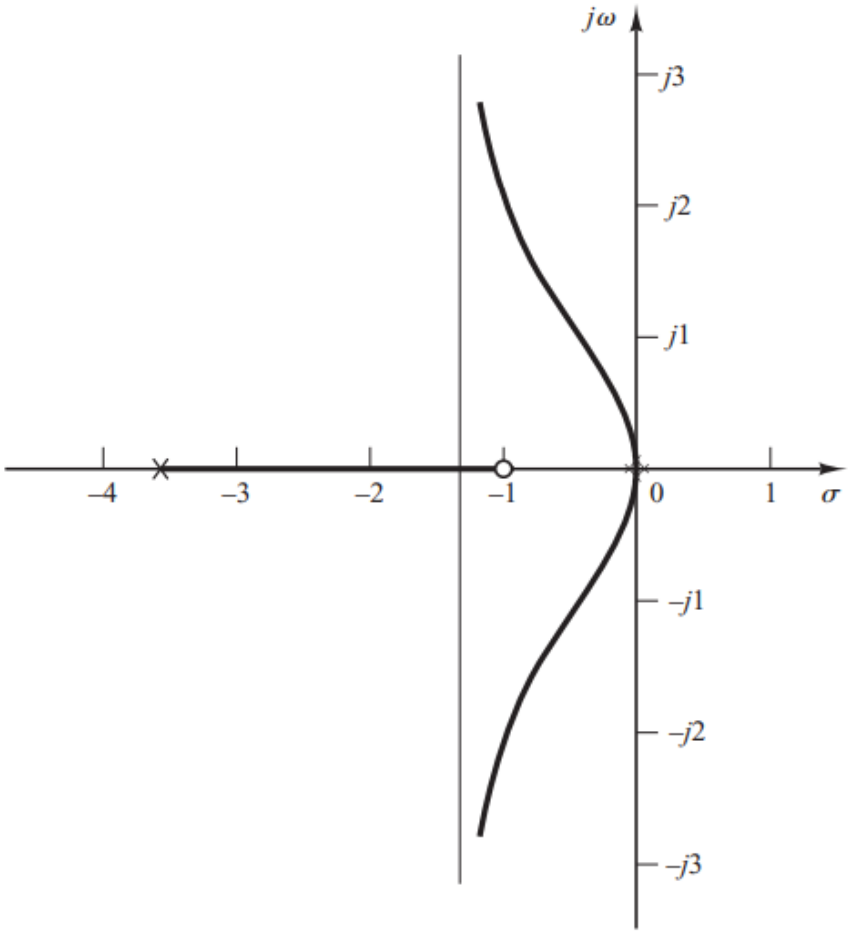
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال

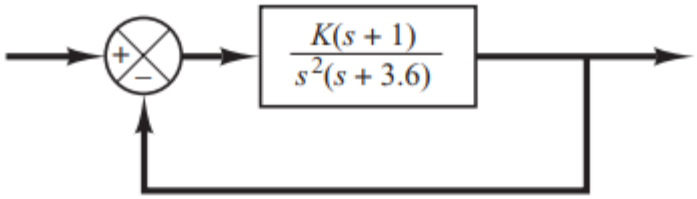




مکان هندسی ریشه ها

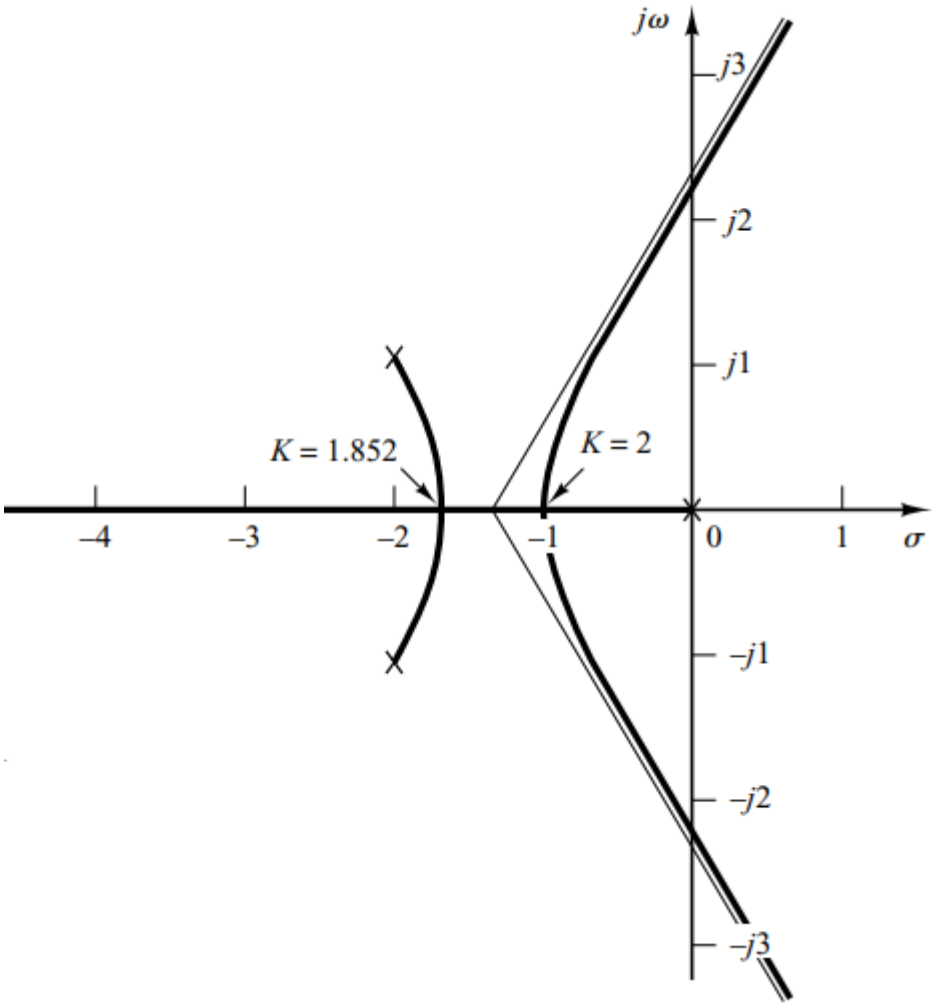
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال

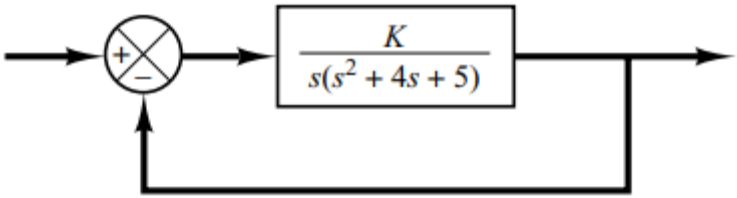




مکان هندسی ریشه ها

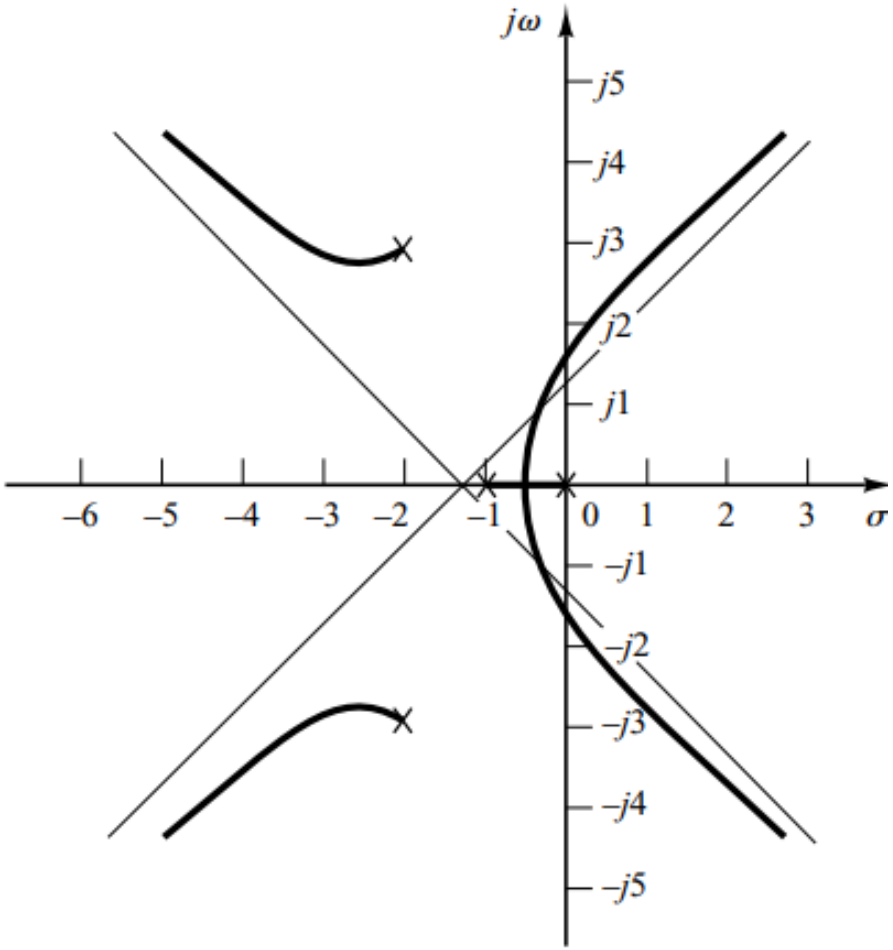
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال

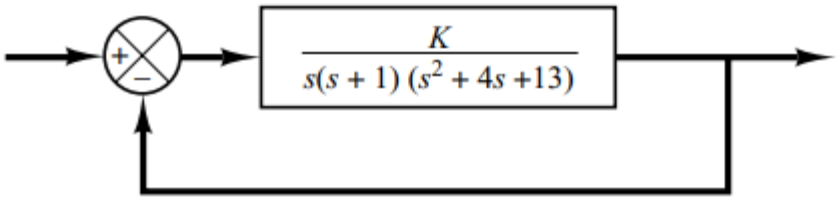




مکان هندسی ریشه ها

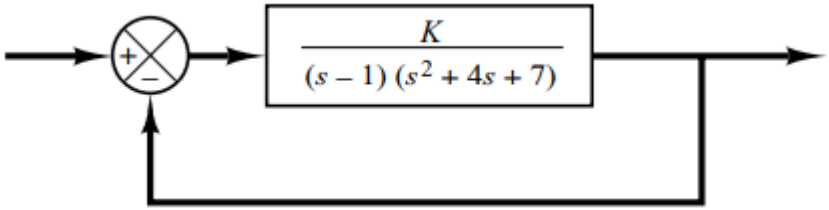
- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال

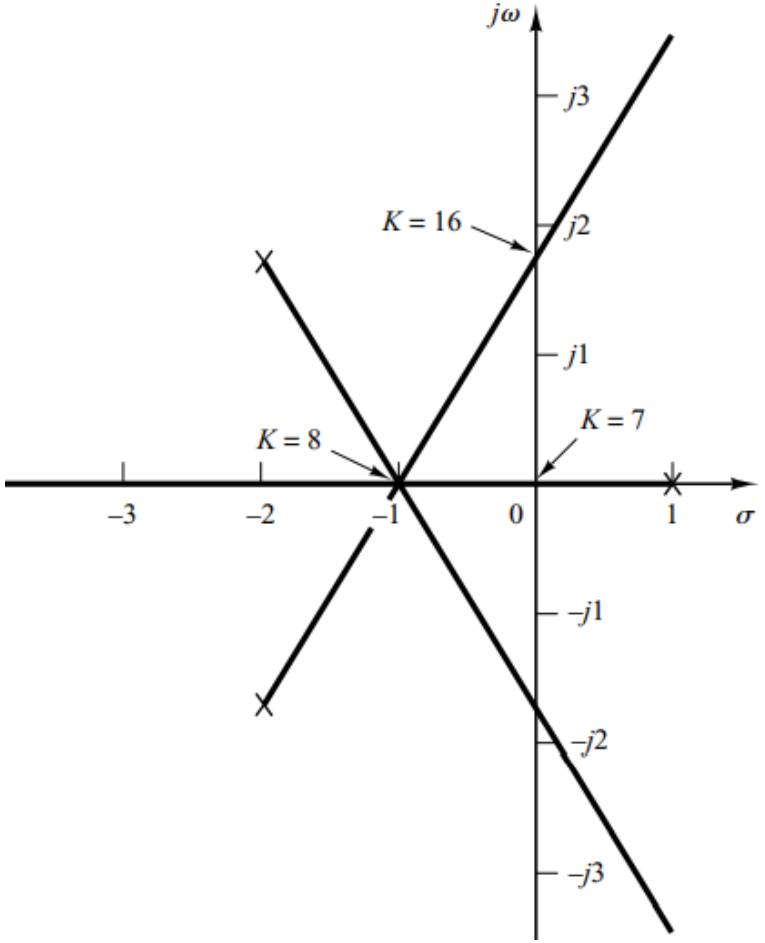




مکان هندسی ریشه ها

- روش رسم مکان هندسی
  - ✓ مثال





مکان هندسی ریشه ها

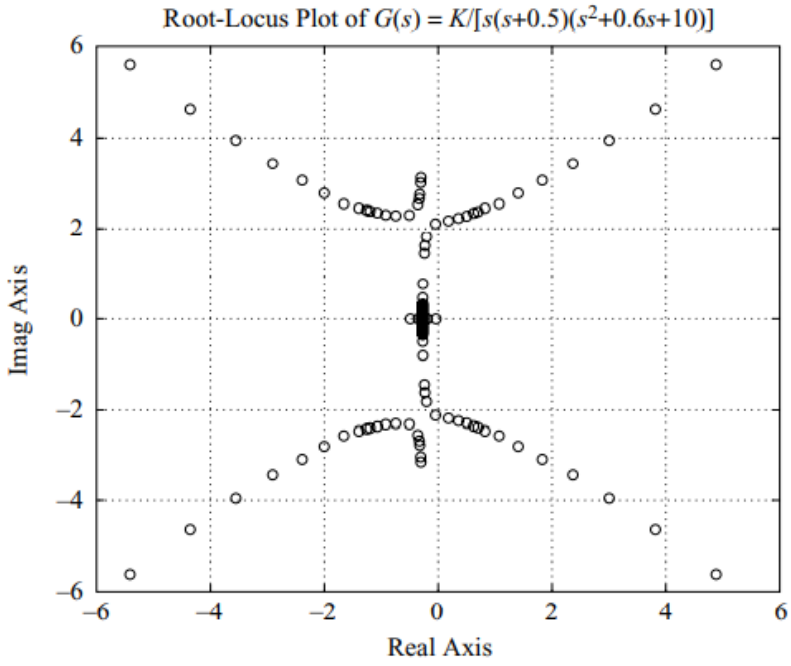
- روش رسم مکان هندسی با استفاده از MatLab
  - ✓ مثال

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)}$$
$$= \frac{K}{s^4 + 1.1s^3 + 10.3s^2 + 5s}$$

MATLAB Program 6–2

```
% --------- Root-locus plot ---------

num = [1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'o')
v = [-6  6  -6  6]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



مکان هندسی ریشه ها

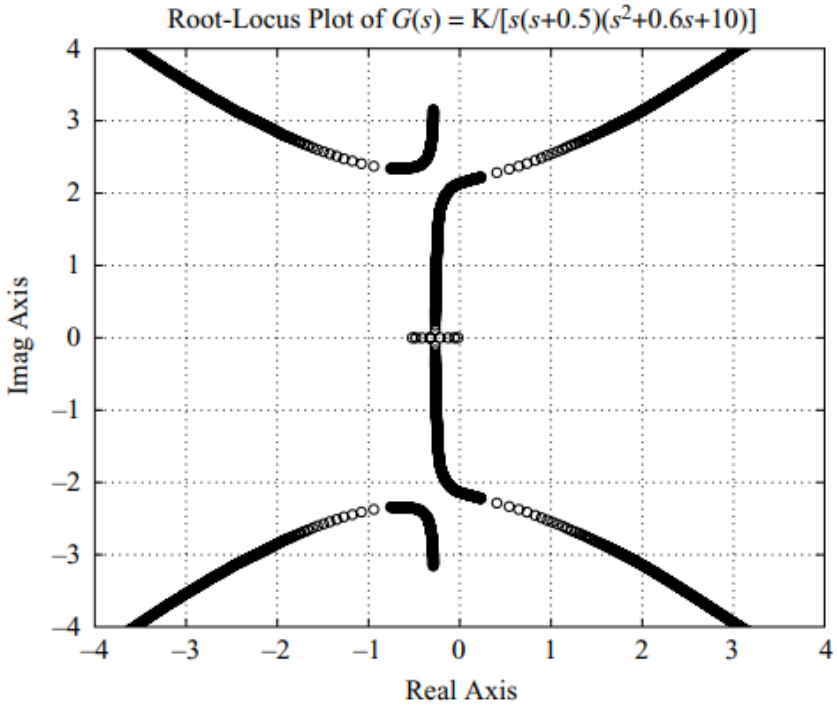
- روش رسم مکان هندسی با استفاده از MatLab
  - ✓ مثال

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)}$$
$$= \frac{K}{s^4 + 1.1s^3 + 10.3s^2 + 5s}$$

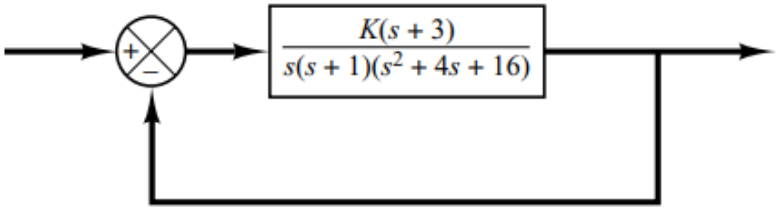
MATLAB Program 6–3

```
% --------- Root-locus plot ---------

num = [1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
K1 = 0:0.2:20;
K2 = 20:0.1:30;
K3 = 30:5:1000;
K = [K1  K2  K3];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r, 'o')
v = [-4  4  -4  4]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



مکان هندسی ریشه ها



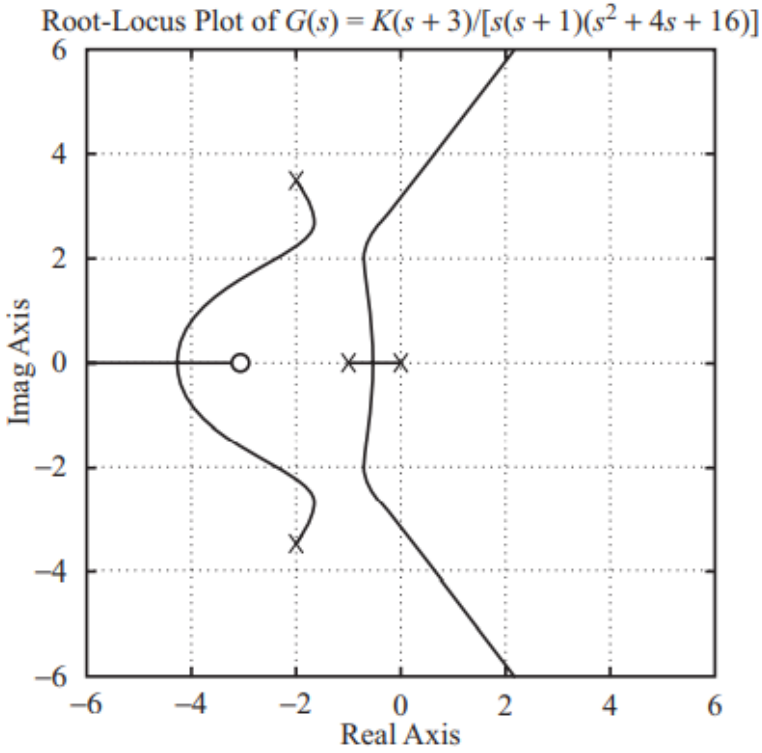
- روش رسم مکان هندسی با استفاده از MatLab
  - ✓ مثال

```
a = [1  1   0];
b = [1  4  16];
c = conv (a,b)
c =
     1  5  20  16  0
```

```
r = roots(b)
r =
  -2.0000 + 3.464li
  -2.0000 - 3.464li
```

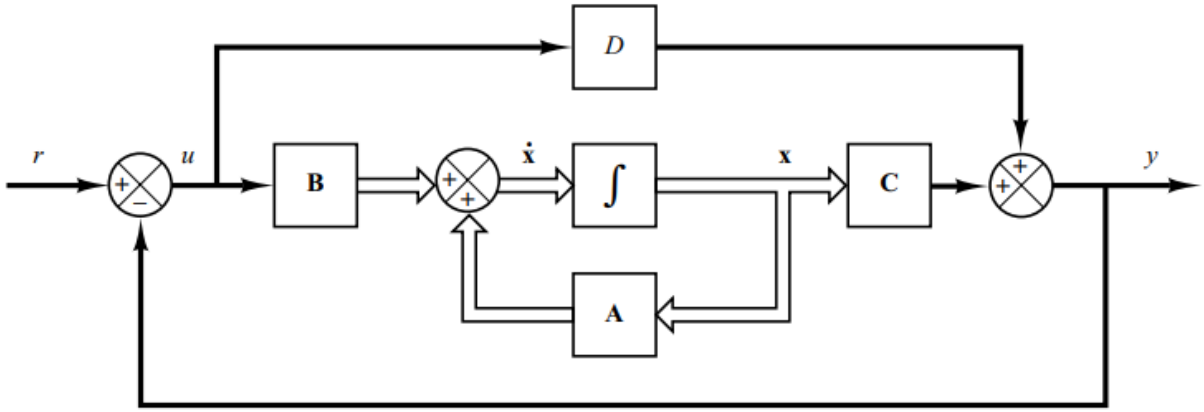
MATLAB Program 6–1

```
% --------- Root-locus plot ---------
num = [1   3];
den = [1   5  20  16   0];
rlocus(num,den)
v = [-6  6  -6  6];
axis(v); axis('square')
grid;
title ('Root-Locus Plot of G(s) = K(s + 3)/[s(s + 1)(s^2 + 4s + 16)]')
```



مکان هندسی ریشه ها

- روش رسم مکان هندسی با استفاده از MatLab
  - ✓ مثال



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$
$$u = r - y$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$

مکان هندسی ریشه ها

- روش رسم مکان هندسی با استفاده از MatLab
  - ✓ مثال

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad D = [0]$$

MATLAB Program 6–4

```
% --------- Root-locus plot ---------
A = [0  1  0;0  0  1;-160  -56  -14];
B = [0;1;-14];
C = [1  0  0];
D = [0];
K = 0:0.1:400;
rlocus(A,B,C,D,K);
v = [-20  20  -20  20]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of System Defined in State Space')
```