دانشگاه سمنان

Semnan University
Faculty of Mechanical Engineering

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشکده مهندسی مکانیک

درس کنترل اتوماتیک

AUTOMATIC CONTROL

پایداری سیستم های کنترلی

❑ فهرست مطالب

پایداری سیستم های کنترل

پاسخ سیستم

- پاسخ سیستم های دینامیکی از دو بخش گذرا و ماندگار تشکیل می شود:

$$c(t) = c_{\mathrm{tr}}(t) + c_{\mathrm{ss}}(t)$$

- پاسخ گذرا ناشی از رفتار طبیع سیستم است و در صورت وجود میرایی، به تدریج به سمت صفر میل می کند.

- پاسخ ماندگار ناشی از تحریک خارجی اعمال شده بر روی سیستم است.

پایداری سیستم های کنترل

- پاسخ سیستم
  - تعیین پاسخ سیستم در حوزه زمان:
    - استخراج معادله دینامیکی سیستم (معادله دیفرانسیل ناهمگن)
    - استخراج پاسخ گذرا با حل معادله همگن
    - استخراج پاسخ ویژه با حل معادله ناهمگن (بدون اعمال شرایط مرزی و اولیه)
    - استخراج پاسخ کلی با جمع دو پاسخ همگن و ویژه (و تعیین ضرایب)

- پایداری سیستم به معنی محدود ماندن دامنه پاسخ سیستم با گذشت زمان است.

پایداری سیستم های کنترل

- پاسخ سیستم

  - تعیین پاسخ سیستم با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

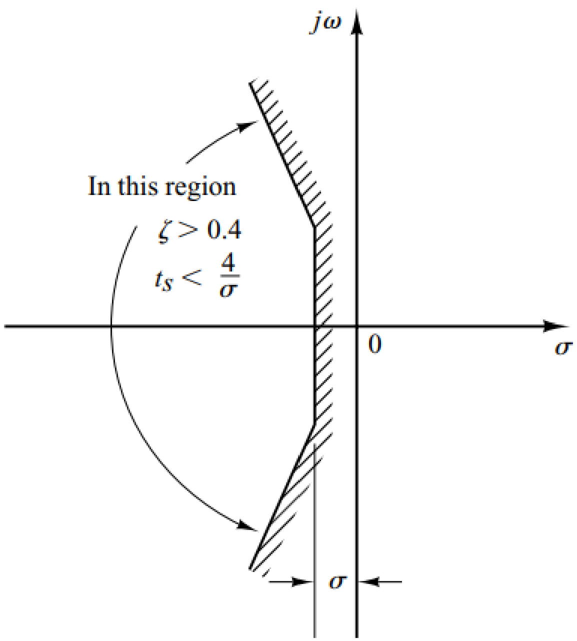
$$\rightarrow \quad C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^{q} \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k) + c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2}$$

$$\rightarrow \quad c(t) = a + \sum_{j=1}^{q} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\cos\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t + \sum_{k=1}^{r} c_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\sin\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t$$

پایداری سیستم های کنترل

- بررسی پایداری با کمک مکان هندسی ریشه ها

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

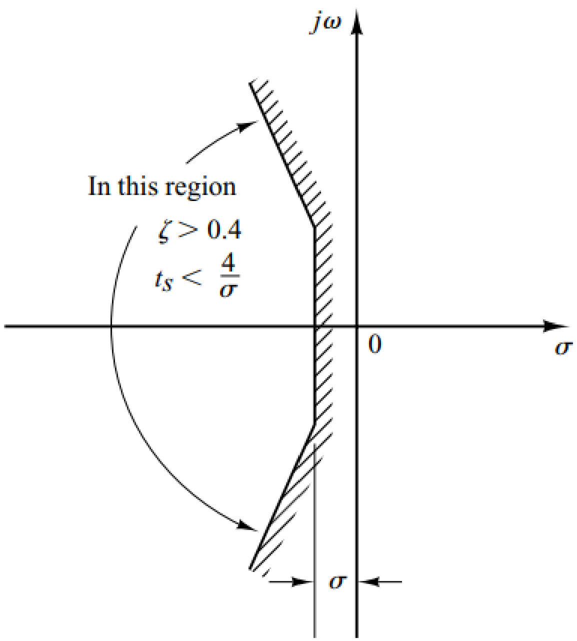


- قطب های سیستم (p_i ها) به صورت اعداد مختلط در فضای لاپلاس قابل نمایش هستند.
- با بررسی موقعیت این قطب ها (با روش مکان هندسی ریشه ها) می توان در خصوص پایداری و رفتار سیستم نتیجه گیری کرد.
- برای پایداری سیستم، تمام قطب های تابع تبدیل سیستم مدار بسته باید در سمت راست محور موهومی قرار داشته باشند.

پایداری سیستم های کنترل

- بررسی پایداری با کمک مکان هندسی ریشه ها

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)}$$



- وجود قطب روی محور موهومی منجر به ایجاد رفتار نوسانی در سیستم می شود.

- وجود قطب ها در سمت راست محور موهومی، تضمینی در خصوص پاسخ گذرای مناسب ایجاد نمی کند. برای داشتن رفتار گذرای مناسب، معمولا محدوده سخت گیرانه تری برای قطب ها در نظر گرفته می شود.

پایداری سیستم های کنترل

- **معیار پایداری راث** (Routh's Stability Criterion)
  - **معیار پایداری راث، روش محاسباتی ساده تری برای بررسی پایداری سیستم های کنترلی است.**
  - **نحوه بررسی معیار راث**
    - ✓ **محاسبه تابع تبدیل مدار بسته**

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- ✓ **تعیین چند جمله ای مشخصه** (مخرج تابع تبدیل مدار بسته)
  - همه ضرایب باید مثبت باشند.

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

- ✓ **تشکیل جدول پایداری راث**

پایداری سیستم های کنترل

- **معیار پایداری راث (Routh's Stability Criterion)**
  - ✓ **تشکیل جدول پایداری راث**

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \qquad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

- ✓ **ستون اول جدول راث:**
  - **وجود صفر : ریشه های موهومی**
  - **تغییر علامت : ناپایداری**

پایداری سیستم های کنترل

معیار پایداری راث

- مثال
  - چند جمله ای مشخصه

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

  - تشکیل جدول پایداری راث

$$\begin{array}{lcc} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

  - شرط پایداری

$$\rightarrow \quad a_1 a_2 > a_0 a_3$$

پایداری سیستم های کنترل

❑ معیار پایداری راث

❖ مثال

✓ چند جمله ای مشخصه

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

✓ تشکیل جدول پایداری راث

▪ امکان ساده سازی

با ضرب کردن سطر در عدد ثابت

$$
\begin{array}{l|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & 1 & 5 & \\
s^1 & -6 & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
\qquad\Bigg\|\qquad
\begin{array}{l|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{0} \\
 & 1 & 2 & 0 \\
s^2 & 1 & 5 & \\
s^1 & -3 & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

✓ تغییر علامت در ستون اول: سیستم ناپایدار

پایداری سیستم های کنترل

❑ معیار پایداری راث

✓ **بررسی پایداری نسبی: استفاده از تغییر متغیر** (معادل شیفت دادن صفحه مختلط)

$$s = \hat{s} - \sigma \qquad (\sigma = \text{constant})$$

پایداری سیستم های کنترل

معیار پایداری راث

مثال

- چند جمله ای مشخصه

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

- تشکیل جدول پایداری راث
  - وجود صفر در ستون اول:

    جایگزینی صفر با ϵ و ادامه محاسبات

    حفظ علامت: دو قطب روی محور موهومی

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \epsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

- عدم تغییر علامت در ستون اول: سیستم پایدار
- وجود صفر در ستون اول: وجود قطب روی محور موهومی و رفتار نوسانی

پایداری سیستم های کنترل

- معیار پایداری راث
  - مثال
    - ✓ چند جمله ای مشخصه
    - ✓ تشکیل جدول پایداری راث
      - وجود سطر صفر:
      - استفاده از چندجمله ای کمکی

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

s^5	1	24	−25
s^4	2	48	−50 ← Auxiliary polynomial $P(s)$
s^3	0	0	

$$\rightarrow \quad 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm 1, \qquad s = \pm j5$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

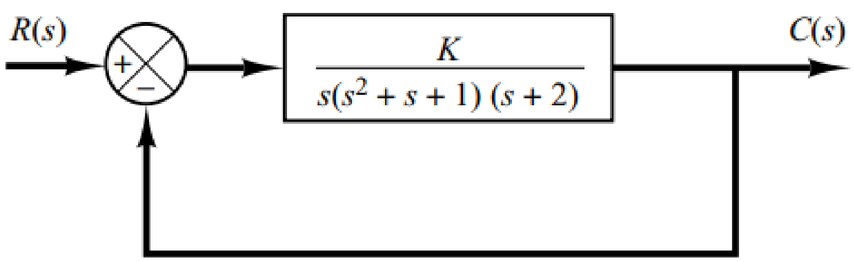
s^5	1	24	−25
s^4	2	48	−50
s^3	8	96	← Coefficients of $dP(s)/ds$
s^2	24	−50	
s^1	112.7	0	
s^0	−50		

✓ تغییر علامت در ستون اول: سیستم ناپایدار

پایداری سیستم های کنترل

- ❑ **معیار پایداری راث**
  - ❖ **کاربرد معیار پایداری راث در تحلیل سیستم های کنترل**
    - ✓ تنظیم میزان بهره در مرز پایداری

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$



$$\rightarrow \quad s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{lccc}
s^4 & 1 & 3 & K \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & \frac{7}{3} & K & \\
s^1 & 2 - \frac{9}{7}K & & \\
s^0 & K & &
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad \frac{14}{9} > K > 0$$

پایداری سیستم های کنترل

- معیار پایداری راث
  - کاربرد معیار پایداری راث در تحلیل سیستم های کنترل
    - مثال
      - چند جمله ای مشخصه

$$s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

      - تشکیل جدول پایداری راث

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & K & 1 & 0 \\
s^2 & \dfrac{K-1}{K} & 1 & \\
s^1 & 1 - \dfrac{K^2}{K-1} & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}$$

      - شرایط پایداری

$$K > 0$$

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

$$1 - \frac{K^2}{K-1} > 0$$

      - امکان برقراری همزمان این ۳ شرط وجود ندارد. پس سیستم ناپایدار است.

$$\frac{K-1-K^2}{K-1} = \frac{-1+K(1-K)}{K-1} < 0$$